Fiche Méthodes - TE609

Un recueil de méthodes pour accompagner les révisions de Systèmes de Transmission

Doryan Denis

2025/2026

Table des matières

1
Notions de base et bruit

Acquis d'Apprentissage.

- Décomposer un signal en raies spectrales et tracer ses spectres bilatéral et monolatéral.
- Calculer la puissance d'un bruit blanc à partir de sa densité spectrale de puissance (DSP).
- Exprimer le rapport signal sur bruit (SNR) en valeur linéaire et en décibels.

1.1 Analyser le spectre d'un signal (Fourier, raies, puissance)

Définition. Transformée de Fourier d'un cosinus
Tout signal sinusoïdal $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ possède deux raies spectrales symétriques d'amplitude $A/2$:

$$\mathcal{F}\{A\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{A}{2}\,\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\,\delta(f + f_0)$$

La **puissance** d'un signal sinusoïdal d'amplitude A est :

$$\boxed{P = \frac{A^2}{2}}$$

La puissance totale d'une somme de sinusoïdes *non corrélées* est la **somme des puissances** individuelles.

Méthode.

1. **Linéariser** le signal : développer tout produit de cosinus à l'aide de la formule
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$
jusqu'à obtenir une somme de termes $A_i \cos(2\pi f_i t)$.
2. **Lister** les fréquences f_i et les amplitudes A_i de chaque composante.
3. **Tracer le spectre bilatéral** : pour chaque composante, placer deux raies en $\pm f_i$ de hauteur $A_i/2$.
4. **Tracer le spectre monolatéral** : conserver uniquement les fréquences positives $f_i > 0$; la hauteur devient A_i (ou $A_i/2$ selon la convention puissance/amplitude utilisée dans le cours).
5. **Calculer la puissance totale** :
$$P = \sum_i \frac{A_i^2}{2}$$

Remarque.
Un signal **périodique** possède un spectre de *raies discrètes* aux multiples de la fréquence fondamentale $f_0 = 1/T_0$.
Le **théorème de Parseval** relie énergie temporelle et fréquentielle :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2\,df$$

Exemple. Application : TD1, exercice 1.4
Soit le signal :

$$s(t) = 4\cos(1000\pi t)\cdot\cos(100\pi t) + 2\cos(500\pi t)$$

1. Identifier les termes de la série de Fourier de $s(t)$.
2. Déterminer la transformée de Fourier $S(f)$.
3. Tracer les spectres bilatéral et monolatéral.

4. Calculer la puissance totale de $s(t)$.

Solution.
Étape 1 : Linéarisation. On applique $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$ au premier terme :

$$\begin{aligned} 4\cos(1000\pi t)\cdot\cos(100\pi t) &= 2\cos\big((1000-100)\pi t\big) + 2\cos\big((1000+100)\pi t\big) \\ &= 2\cos(900\pi t) + 2\cos(1100\pi t) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{s(t) = 2\cos(2\pi\cdot 450\,t) + 2\cos(2\pi\cdot 550\,t) + 2\cos(2\pi\cdot 250\,t)}$$

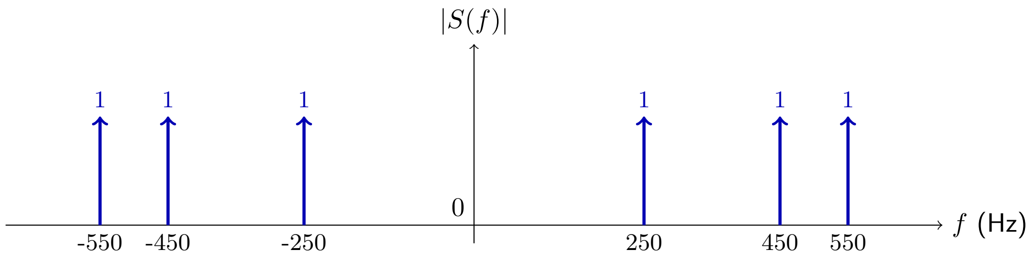
Le signal contient **trois composantes** aux fréquences $f_1 = 250\,\text{Hz}$, $f_2 = 450\,\text{Hz}$, $f_3 = 550\,\text{Hz}$, toutes d'amplitude $A = 2$.

Étape 2 : Transformée de Fourier.

$$\begin{aligned} S(f) = &\big[\delta(f-250) + \delta(f+250)\big] \\ &+ \big[\delta(f-450) + \delta(f+450)\big] \\ &+ \big[\delta(f-550) + \delta(f+550)\big] \end{aligned}$$

(chaque impulsion de Dirac pondérée par $A_i/2 = 1$).

Étape 3 : Spectres.



Le **spectre monolatéral** conserve les fréquences positives avec des raies de hauteur $A_i = 2$ aux fréquences 250 Hz, 450 Hz et 550 Hz.

Étape 4 : Puissance.

$$P = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + \frac{A_3^2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} = \boxed{6\ \text{W}}$$

La composante à $f_3 = 550\,\text{Hz}$ représente $\dfrac{2}{6} \approx 33\,\%$ de la puissance totale.

1.2 Calculer la puissance du bruit blanc à partir de sa DSP

Définition. Bruit blanc (AWGN)
Un **bruit blanc** (*Additive White Gaussian Noise*, AWGN) est un bruit dont la **densité spectrale de puissance (DSP) est constante** sur tout le spectre fréquentiel.

- DSP **bilatérale** (côtés + et −) : $S_n(f) = \dfrac{N_0}{2}$ [W/Hz]
- DSP **monolatérale** (côté + seulement) : $S_n(f) = N_0$ [W/Hz]

La **puissance du bruit** sur une bande B (Hz) est finie :

$$\boxed{P_b = S_n \cdot B}$$

où S_n est la DSP monolatérale et B la largeur de bande du système.

Méthode.

1. Identifier la DSP monolatérale S_n [W/Hz] (ou bilatérale $N_0/2$) et la bande passante B [Hz].
2. Calculer la puissance en watts :
$$P_b = S_n \cdot B$$
3. Convertir en **dBm** si nécessaire :
$$P_b\,[\text{dBm}] = 10\log_{10}\left(\frac{P_b\,[\text{mW}]}{1\ \text{mW}}\right)$$

Remarque.
Si la bande passante est **infinie**, la puissance du bruit blanc est infinie, ce qui est physiquement irréaliste. En pratique, tout système impose une bande limitée qui borne P_b.
Rappel de conversion rapide : $P\,[\text{dBm}] = 10\log_{10}(P\,[\text{mW}])$. Quelques valeurs à retenir : $1\,\text{mW} \leftrightarrow 0\,\text{dBm}$; $10\,\text{mW} \leftrightarrow 10\,\text{dBm}$; $20\,\text{mW} \leftrightarrow 13\,\text{dBm}$.

Exemple. Application : CE TE609 2025-2026, exercice 2
Un canal de transmission est soumis à un bruit blanc additif dont la densité spectrale de puissance (DSP) monolatérale est constante et égale à $S_n = 4 \times 10^{-9}$ W/Hz.

1. Expliquer ce que signifie « bruit blanc ».
2. Déterminer la puissance totale du bruit si la bande passante du système est infinie.
3. Calculer la puissance du bruit P_b (en mW et en dBm) si le système a une bande passante limitée à $B = 5$ MHz.

Solution.
Question 1. Un bruit blanc est un bruit dont la DSP est **uniformément répartie sur tout le spectre fréquentiel** : chaque fréquence contribue de manière égale.

Question 2. La puissance totale est $P = \displaystyle\int_0^{+\infty} S_n\,df$. Comme S_n est constante non nulle et la borne supérieure est infinie,
$$P = S_n \cdot (+\infty) = +\infty$$
La puissance est infinie si la bande est infinie.

Question 3. Avec $B = 5\,\text{MHz} = 5 \times 10^6\,\text{Hz}$:
$$P_b = S_n \cdot B = 4 \times 10^{-9} \times 5 \times 10^6 = \boxed{2 \times 10^{-2}\,\text{W} = 20\,\text{mW}}$$
Conversion en dBm :
$$P_b\,[\text{dBm}] = 10\log_{10}(20) \approx \boxed{13\,\text{dBm}}$$

1.3 Calculer le rapport signal sur bruit (SNR) en linéaire et en dB

Définition. Rapport signal sur bruit (SNR)
Le **rapport signal sur bruit** (*Signal-to-Noise Ratio*, SNR) mesure la qualité d'une transmission. Il compare la puissance du signal utile reçu P_r à la puissance du bruit P_b :
$$\text{SNR (linéaire)} = \frac{P_r}{P_b}$$
$$\boxed{\text{SNR [dB]} = 10\log_{10}\left(\frac{P_r}{P_b}\right) = P_r\,[\text{dBm}] - P_b\,[\text{dBm}]}$$
Un SNR positif indique que le signal domine le bruit ; un SNR négatif indique que le bruit domine le signal.

Méthode.

1. Identifier P_r (puissance du signal utile) et P_b (puissance du bruit), dans les **mêmes unités**.
2. Calculer le **SNR linéaire** : $\text{SNR} = P_r/P_b$.
3. Convertir en **dB** : $\text{SNR}\,[\text{dB}] = 10\log_{10}(\text{SNR})$.
4. **Analyser l'effet d'une variation de bande** : si B double, P_b double (bruit blanc), donc le SNR est divisé par 2, soit une baisse de $3\,\text{dB}$.

Remarque.
En décibels, la soustraction remplace la division :

$$\text{SNR}\,[\text{dB}] = P_r\,[\text{dBm}] - P_b\,[\text{dBm}]$$

Attention : il faut que P_r et P_b soient exprimés dans la même référence (tous deux en dBm, ou tous deux en dBW).

Exemple. Application : CE TE609 2025-2026, exercice 2 (suite)
On reprend le canal précédent : $P_b = 20\,\text{mW}$ pour $B = 5\,\text{MHz}$. On suppose que la puissance du signal utile reçu est $P_r = 1\,\text{mW}$.

1. Calculer le SNR en valeur linéaire et en dB.
2. Comment évolue le SNR si la bande passante est doublée ? (Raisonnement qualitatif attendu, sans recalcul complet.)

Solution.
Question 1.
SNR linéaire :

$$\text{SNR} = \frac{P_r}{P_b} = \frac{1\,\text{mW}}{20\,\text{mW}} = \boxed{0{,}05}$$

Conversion en dB :

$$\text{SNR}\,[\text{dB}] = 10\log_{10}(0{,}05) = 10\log_{10}\left(\frac{1}{20}\right) = -10\log_{10}(20) \approx \boxed{-13\,\text{dB}}$$

Le bruit domine le signal (SNR négatif).

Question 2.
Si $B' = 2B$, alors $P_b' = S_n \cdot 2B = 2P_b$ (le bruit double). Le signal utile P_r est inchangé, donc :

$$\text{SNR}' = \frac{P_r}{2P_b} = \frac{\text{SNR}}{2}$$

<u>Le SNR est divisé par 2, soit une baisse de $3\,\text{dB}$.</u>
Conclusion : doubler la bande passante d'un système dégradé systématiquement le SNR de 3 dB (en canal AWGN).

2 Modulation d'Amplitude (AM)

Acquis d'Apprentissage.

- Calculer l'expression et la transformée de Fourier d'un signal AM à porteuse supprimée (AM-PS).
- Identifier le type de modulation AM (PS ou PC) à partir d'un spectre de puissance et en déduire f_c, f_m et la bande passante.
- Déterminer le taux de modulation m et la fréquence f_m à partir de la représentation temporelle d'un signal AM-PC.
- Tracer le spectre d'amplitude d'un signal AM-PC et calculer les puissances des composantes.

Propriété. Signal AM à porteuse conservée (AM-PC)
Soit $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ le signal modulant et $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ la porteuse. Le signal AM-PC est :

$$\boxed{s(t) = A_c\big(1 + m\cos(2\pi f_m t)\big)\cos(2\pi f_c t)}$$

où $m = k\,A_m$ est le **taux (indice) de modulation**, $0 < m \leq 1$. En développant par linéarisation :

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{mA_c}{2}\cos\!\big(2\pi(f_c - f_m)t\big) + \frac{mA_c}{2}\cos\!\big(2\pi(f_c + f_m)t\big)$$

Le spectre comporte **3 raies** côté fréquences positives : la porteuse f_c (amplitude A_c) et deux raies latérales $f_c \pm f_m$ (amplitude $mA_c/2$ chacune). La bande occupée est $B = 2f_m$.

Propriété. Signal AM à porteuse supprimée (AM-PS)
Le signal AM-PS est obtenu en multipliant directement $m(t)$ par $c(t)$:

$$\boxed{s(t) = k\,m(t)\cdot A_c\cos(2\pi f_c t)}$$

La porteuse est absente du spectre. Pour $m(t) = A_m\cos(2\pi f_m t)$:

$$s(t) = \frac{k\,A_m A_c}{2}\cos\!\big(2\pi(f_c - f_m)t\big) + \frac{k\,A_m A_c}{2}\cos\!\big(2\pi(f_c + f_m)t\big)$$

Le spectre comporte **2 raies** (par composante de $m(t)$) et **aucune raie centrale** à f_c.

2.1 Calculer l'expression du signal AM-PS et sa transformée de Fourier

Méthode.

1. Écrire $s(t) = k\,m(t)\cdot c(t)$.
2. Remplacer $m(t)$ et $c(t)$ par leurs expressions.
3. **Linéariser** chaque produit par :

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

   On obtient une somme de cosinus aux fréquences $f_c \pm f_i$.
4. Calculer $S(f)$ en appliquant $\mathcal{F}\{A\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{A}{2}\big[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\big]$.
5. Pour chaque composante $A_i\cos(2\pi f_i t)$ de $s(t)$, placer des impulsions de Dirac de poids $A_i/2$ aux fréquences $\pm f_i$.

Remarque.
Pour un signal modulant *multifréquence* $m(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t)$, chaque composante génère **deux raies** dans le spectre de $s(t)$ (aux fréquences $f_c \pm f_i$). Le nombre total de raies côté positif est **pair** (critère de reconnaissance de l'AM-PS).

Exemple. Application : DE TE609 2024-2025, exercice 1
On considère une modulation AM à porteuse supprimée avec $k = 1$, $m(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ ($f_2 > f_1$) et $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$.

a) Donner l'expression du signal modulé $s(t)$ sous forme de somme de cosinus, ainsi que sa transformée de Fourier $S(f)$.

b) Le spectre monolatéral de $s(t)$ présente des raies aux fréquences 47, 48, 50, 52 et 53 kHz, mais la raie à 50 kHz est absente (AM-PS confirmée). En déduire f_c, f_1 et f_2.

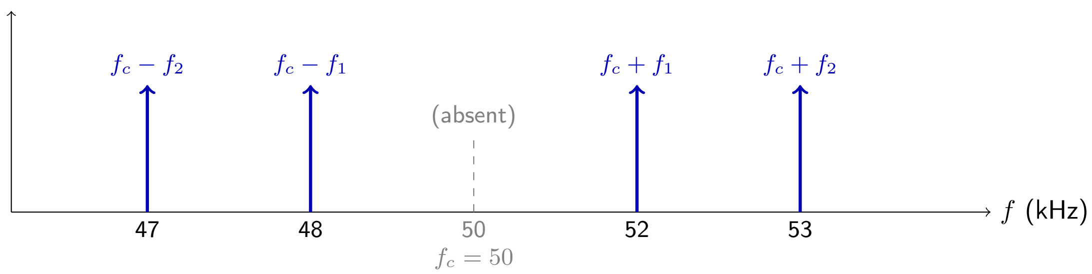
Solution.
Question a) : Expression de $s(t)$.
On développe $s(t) = m(t) \cdot c(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \left[A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)\right] \cdot A_c \cos(2\pi f_c t) \\ &= \frac{A_1 A_c}{2}\left[\cos(2\pi(f_c - f_1)t) + \cos(2\pi(f_c + f_1)t)\right] \\ &\quad + \frac{A_2 A_c}{2}\left[\cos(2\pi(f_c - f_2)t) + \cos(2\pi(f_c + f_2)t)\right] \end{aligned}$$

La transformée de Fourier est :

$$\begin{aligned} S(f) = \frac{A_1 A_c}{4}&\left[\delta(f - (f_c - f_1)) + \delta(f + (f_c - f_1)) + \delta(f - (f_c + f_1)) + \delta(f + (f_c + f_1))\right] \\ + \frac{A_2 A_c}{4}&\left[\delta(f - (f_c - f_2)) + \delta(f + (f_c - f_2)) + \delta(f - (f_c + f_2)) + \delta(f + (f_c + f_2))\right] \end{aligned}$$

Question b) : Identification de f_c, f_1, f_2.
Le spectre monolatéral montre 4 raies à 47, 48, 52, 53 kHz. La porteuse est absente (AM-PS) : elle se trouverait au centre.



Par symétrie autour de f_c :

$$f_c = \frac{(f_c - f_1) + (f_c + f_1)}{2} = \frac{48 + 52}{2} = \boxed{f_c = 50 \text{ kHz}}$$

$$f_1 = f_c - 48 = 50 - 48 = \boxed{f_1 = 2 \text{ kHz}}$$

$$f_2 = f_c - 47 = 50 - 47 = \boxed{f_2 = 3 \text{ kHz}}$$

2.2 Identifier le type AM et lire f_c, f_m, la bande passante depuis un spectre

Méthode.

1. **Identifier PS ou PC** :
   - Spectre de puissance avec une **raie centrale dominante** → AM à porteuse **conservée** (AM-PC) : nombre de raies **impair** (1 porteuse + 2 latérales par f_m).
   - **Pas de raie centrale** (nombre de raies **pair**) → AM à porteuse **supprimée** (AM-PS).
2. **Trouver** f_c : c'est le centre de symétrie des raies.

$$f_c = \frac{f_{\text{basse}} + f_{\text{haute}}}{2} \quad \text{(pour chaque paire symétrique)}$$

3. **Trouver** f_m (ou f_1, f_2...) : écart entre f_c et chaque raie latérale.

$$f_m = f_{\text{haute}} - f_c = f_c - f_{\text{basse}}$$

4. **Bande passante minimale du canal** :

$$\boxed{B = f_{\max} - f_{\min}}$$

où $f_{\max}$ et $f_{\min}$ sont les fréquences des raies extrêmes du spectre monolatéral.

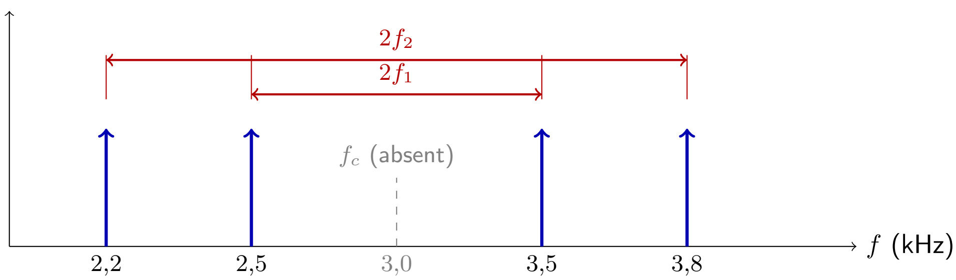
Remarque.
Sur un spectre de **puissance**, chaque raie est proportionnelle à $A_i^2/2$. Sur un spectre d'**amplitude**, chaque raie vaut $A_i/2$ (bilatéral) ou A_i (monolatéral). Ne pas confondre les deux conventions.

Exemple. Application : CE TE609 2025-2026, exercice 3
La figure ci-dessous montre le **spectre de puissance** d'un signal modulé AM. Les raies se situent aux fréquences 2,2 kHz ; 2,5 kHz ; 3,5 kHz et 3,8 kHz. Aucune raie n'est présente à 3 kHz.

1. De quel type de modulation AM s'agit-il ? Justifier.
2. Déterminer la fréquence de la porteuse f_c.
3. Déterminer le nombre et la valeur des fréquences du signal modulant.
4. Proposer un montage réalisant cette modulation.
5. Déterminer la largeur de bande minimale du canal.

Solution.
Question 1. Le nombre de raies spectrales est **4 (pair)** et il n'y a **aucune raie centrale** à 3 kHz : il s'agit d'une modulation AM à **porteuse supprimée (AM-PS)**.

Question 2.



Par symétrie des raies autour de la porteuse absente :

$$f_c = \frac{2{,}5 + 3{,}5}{2} = \boxed{3 \text{ kHz}}$$

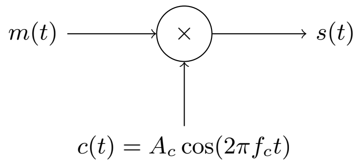
Question 3. Il y a **2 fréquences modulantes** (f_1 et f_2) :

$$f_1 = f_c - 2{,}5 = 3 - 2{,}5 = \boxed{500 \text{ Hz}}$$

$$f_2 = f_c - 2{,}2 = 3 - 2{,}2 = \boxed{800\text{ Hz}}$$

Vérification : $f_c + f_2 = 3{,}8$ kHz ✓

Question 4. Le montage réalisant une AM-PS est un **multiplieur** :



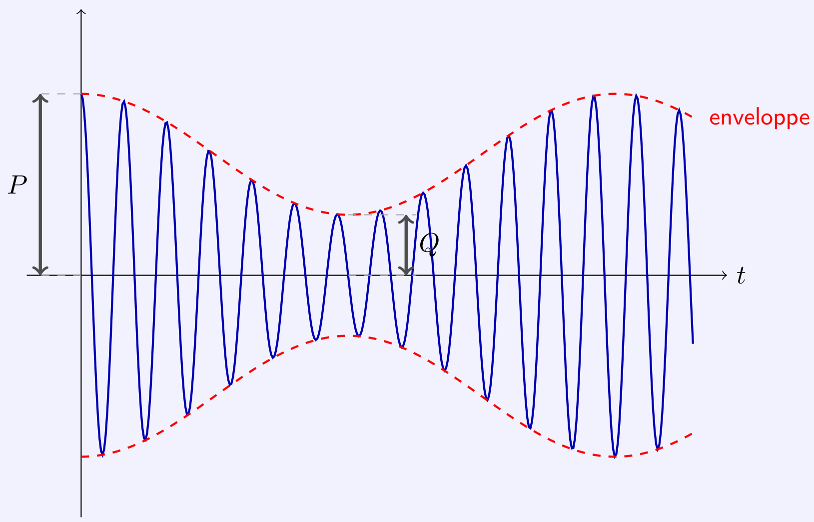
Question 5.

$$\boxed{B = 3{,}8\text{ kHz} - 2{,}2\text{ kHz} = 1{,}6\text{ kHz}}$$

2.3 Calculer le taux de modulation m depuis le signal temporel

Méthode.

Sur la représentation temporelle d'un signal AM-PC, l'enveloppe supérieure dessine une sinusoïde. On lit graphiquement le maximum P et le minimum Q de l'enveloppe :



1. Lire P (valeur maximale de l'enveloppe) et Q (valeur minimale).
2. Calculer l'amplitude de la porteuse et le taux de modulation :

$$\boxed{A_c = \frac{P+Q}{2}} \qquad \boxed{m = \frac{P-Q}{P+Q}}$$

3. Lire la période T_m de l'enveloppe (= période du signal modulant) ; en déduire $f_m = 1/T_m$.
4. Si $m > 1$: **surmodulation**, l'enveloppe ne reproduit plus fidèlement le signal ; la démodulation par détection d'enveloppe échoue.

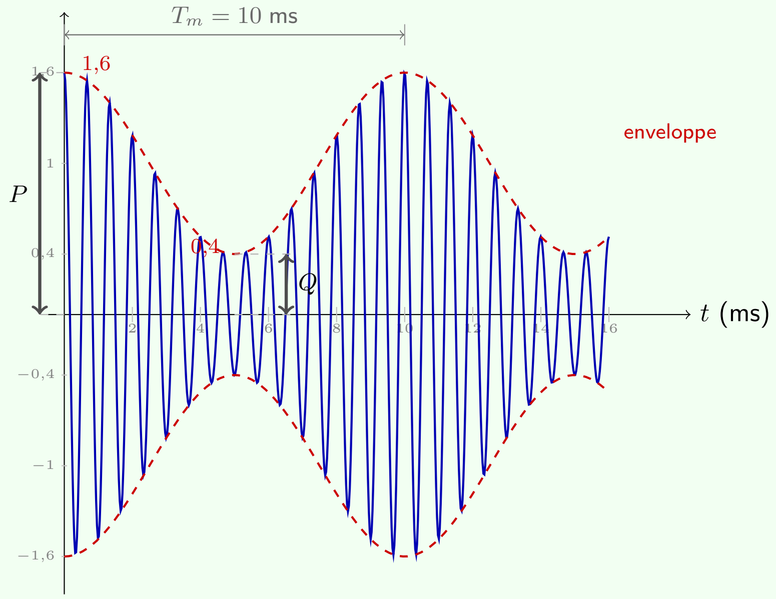
Remarque.

Les formules $A_c = (P+Q)/2$ et $m = (P-Q)/(P+Q)$ se retrouvent en résolvant le système $\{P = A_c(1+m),\ Q = A_c(1-m)\}$.

Condition sans surmodulation : $m \leq 1$, soit $Q \geq 0$.

Exemple. Application : CE TE609 2025-2026, exercice 4

La figure ci-dessous montre un signal modulé AM à porteuse conservée, correspondant au message $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$. La fréquence de la porteuse est $f_c = 5$ kHz.



À partir de cette figure, répondre aux questions :

1. Donner l'expression générale de $s(t)$ et la signification de chaque paramètre.
2. Déterminer A_c.
3. Déterminer le taux de modulation m.
4. Déterminer la fréquence f_m du signal message.
5. Qu'observe-t-on si l'on augmente A_m jusqu'à ce que l'enveloppe ne reproduise plus le message ? Comment appelle-t-on ce phénomène ?

Solution.
Question 1.
L'expression générale du signal AM-PC est :

$$\boxed{s(t) = A_c\big(1 + m\cos(2\pi f_m t)\big)\cos(2\pi f_c t)}$$

avec : A_c = amplitude de la porteuse, f_c = fréquence de la porteuse, m = indice (taux) de modulation, f_m = fréquence du signal modulant.

Question 2.

$$A_c = \frac{P+Q}{2} = \frac{1{,}6+0{,}4}{2} = \boxed{1\text{ V}}$$

Question 3.

$$m = \frac{P-Q}{P+Q} = \frac{1{,}6-0{,}4}{1{,}6+0{,}4} = \frac{1{,}2}{2{,}0} = \boxed{0{,}6 = 60\,\%}$$

Question 4. L'enveloppe supérieure du signal modulé correspond au signal message. On lit directement sur la figure une période $T_m = 10$ ms :

$$f_m = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{10\times 10^{-3}} = \boxed{100\text{ Hz}}$$

Question 5. En augmentant A_m, le taux m dépasse 1. L'enveloppe inférieure du signal modulé ne reste plus positive : elle coupe l'axe des abscisses, et le signal présente des **croisements de zéro supplémentaires**. L'enveloppe ne reproduit plus le message. Ce phénomène s'appelle la **surmodulation** $(m > 1)$; la démodulation par enveloppe est alors impossible.

2.4 Tracer le spectre d'amplitude AM-PC et calculer les puissances

Méthode.
Pour un signal AM-PC $s(t) = A_c(1 + m\cos(2\pi f_m t))\cos(2\pi f_c t)$, après linéarisation, on obtient trois termes :

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos(2\pi f_c t)}_{\text{porteuse}} + \underbrace{\frac{mA_c}{2}\cos(2\pi(f_c - f_m)t)}_{\text{raie inf.}} + \underbrace{\frac{mA_c}{2}\cos(2\pi(f_c + f_m)t)}_{\text{raie sup.}}$$

1. **Tracer le spectre monolatéral d'amplitude** : raie à f_c de hauteur A_c, raies à $f_c \pm f_m$ de hauteur $mA_c/2$.
2. **Calculer les puissances** :

$$P_{\text{porteuse}} = \frac{A_c^2}{2}$$
$$P_{\text{chaque raie latérale}} = \frac{1}{2}\left(\frac{mA_c}{2}\right)^2 = \frac{m^2A_c^2}{8}$$
$$P_{\text{totale}} = \frac{A_c^2}{2}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$$

3. **Rendement en puissance** (fraction utile dans les bandes latérales) :

$$\eta = \frac{m^2/2}{1 + m^2/2} = \frac{m^2}{m^2 + 2}$$

Pour $m = 1$: $\eta = 1/3 \approx 33\,\%$ seulement est utile.

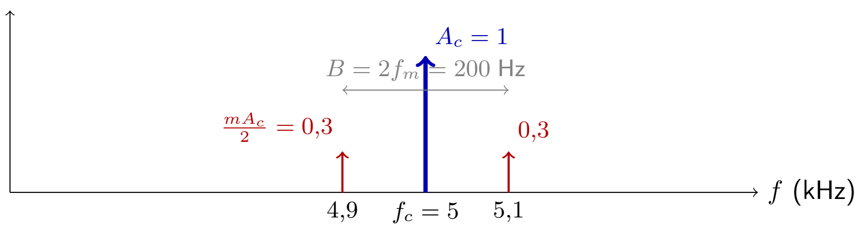
Remarque.
En AM-PS, il n'y a pas de porteuse : **toute la puissance est dans les bandes latérales**, soit un rendement de 100 % — c'est l'avantage de l'AM-PS.

Exemple. Application : CE TE609 2025-2026, exercice 4 (suite) et exercice 3
Pour le signal AM-PC de l'exercice précédent ($A_c = 1$ V, $m = 0{,}6$, $f_c = 5$ kHz, $f_m = 100$ Hz) :

1. Tracer le spectre monolatéral du signal modulé en précisant les fréquences et amplitudes des raies.
2. Calculer la puissance de la porteuse, des raies latérales et la puissance totale.

Solution.
Question 1 : Spectre monolatéral.
On développe :

$$s(t) = 1 \cdot \cos(2\pi \cdot 5000\,t) + 0{,}3\cos(2\pi \cdot 4900\,t) + 0{,}3\cos(2\pi \cdot 5100\,t)$$



Question 2 : Puissances.

$$P_{\text{porteuse}} = \frac{A_c^2}{2} = \frac{1^2}{2} = \boxed{0{,}5\text{ W}}$$
$$P_{\text{raie lat.}} = \frac{1}{2}\left(\frac{mA_c}{2}\right)^2 = \frac{(0{,}3)^2}{2} = \frac{0{,}09}{2} = \boxed{0{,}045\text{ W}} \quad \text{(par raie)}$$
$$P_{\text{totale}} = \frac{A_c^2}{2}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = 0{,}5\left(1 + \frac{0{,}36}{2}\right) = 0{,}5 \times 1{,}18 = \boxed{0{,}59\text{ W}}$$

Seule la fraction $\dfrac{2 \times 0{,}045}{0{,}59} \approx 15{,}3\,\%$ de la puissance totale est transportée dans les bandes latérales (information utile). La majorité de la puissance est dans la porteuse, qui ne transporte aucune information.

3

Modulation de Fréquence (FM)

Acquis d'Apprentissage.

- Calculer l'indice de modulation FM β_f et l'excursion en fréquence Δf.
- Écrire l'expression temporelle du signal FM.
- Estimer la bande passante par la règle de Carson.
- Lire la table de Bessel et tracer le spectre FM normalisé.
- Calculer la puissance totale et la puissance filtrée d'un signal FM.
- Déduire le pourcentage de puissance conservée après filtrage.

Propriété. Signal FM : expression générale
Soit $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ le signal modulant et $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ la porteuse. La **modulation de fréquence** fait varier la fréquence instantanée autour de f_c :

$$f_i(t) = f_c + k_f\, m(t) = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$$

où $\Delta f = k_f A_m$ est l'**excursion en fréquence** [Hz] et k_f la **constante de déviation** [Hz/V].
Le signal FM est :

$$\boxed{u(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t))}$$

avec l'**indice de modulation FM** :

$$\boxed{\beta_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m}}$$

Propriété. Développement en série de Bessel
Le signal FM se développe en une somme infinie de composantes :

$$u(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta_f) \cos(2\pi(f_c + n f_m)t)$$

où $J_n(\beta_f)$ est la **fonction de Bessel de première espèce d'ordre** n. Le spectre FM comporte des raies à $f_c + n f_m$ ($n \in \mathbb{Z}$), d'amplitude $A_c\, J_n(\beta_f)$. À la différence de l'AM, **le nombre de raies est théoriquement infini**.

3.1 Calculer l'indice de modulation FM β_f et l'excursion en fréquence Δf

Méthode.

1. Identifier k_f [Hz/V], A_m [V] et f_m [Hz] depuis l'énoncé.
2. Calculer l'**excursion en fréquence** :

$$\Delta f = k_f \cdot A_m \quad \text{[Hz]}$$

3. Calculer l'**indice de modulation** :

$$\boxed{\beta_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{k_f A_m}{f_m}}$$

4. Si l'expression temporelle du signal FM est donnée sous la forme $u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t))$, lire directement β_f comme le **coefficient de l'argument du sinus** et f_m à partir de la pulsation du sinus.

Remarque.

- **FM à large bande (WFM)** : $\beta_f \gg 1$ (radio FM, $\beta \approx 5$).
- **FM à bande étroite (NFM)** : $\beta_f \ll 1$ (téléphonie mobile).
- Si on **divise** A_m **par 2** : Δf est divisé par 2, β_f est divisé par 2, mais f_m est inchangée.
- Si on **double** f_m : Δf est inchangé, β_f est divisé par 2.

Exemple. Application : DE TE609 2024-2025, exercice 2 (a)
La porteuse est $c(t) = 10\cos(4000\pi t)$ et le signal modulant est $m(t) = 4\cos(16\pi t)$. La constante de déviation est $k_f = 10$ Hz/V. Déterminer l'indice de modulation β_f.

Solution.
On identifie :

$$A_c = 10 \text{ V}, \quad f_c = \frac{4000\pi}{2\pi} = 2000 \text{ Hz}, \quad A_m = 4 \text{ V}, \quad f_m = \frac{16\pi}{2\pi} = 8 \text{ Hz}$$

Excursion en fréquence :

$$\Delta f = k_f \cdot A_m = 10 \times 4 = 40 \text{ Hz}$$

Indice de modulation :

$$\boxed{\beta_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{40}{8} = 5}$$

3.2 Écrire l'expression temporelle du signal FM

Méthode.

1. Calculer β_f (méthode 3.1).
2. Substituer dans la formule générale :

$$u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t))$$

   Le terme $\beta_f \sin(2\pi f_m t)$ est la **déviation de phase instantanée**.
3. Vérifier les unités : f_c et f_m en Hz, t en secondes.

Remarque.
L'intégrale d'un cosinus est un sinus : c'est pourquoi l'argument contient $\sin(2\pi f_m t)$ et non $\cos$. La formule provient de $\phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau = 2\pi k_f \frac{A_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) = \beta_f \sin(2\pi f_m t)$.

Exemple. Application : DE TE609 2024-2025, exercice 2 (b)
Avec les données de l'exemple précédent ($A_c = 10$, $f_c = 2000$ Hz, $\beta_f = 5$, $f_m = 8$ Hz), écrire l'expression du signal FM $u(t)$.

Solution.

$$\boxed{u(t) = 10\cos(4000\pi t + 5\sin(16\pi t))}$$

Le terme $5\sin(16\pi t)$ représente la déviation de phase instantanée due à la modulation ; la fréquence instantanée est bien $f_i(t) = 2000 + 40\cos(16\pi t)$ Hz.

3.3 Calculer la bande passante par la règle de Carson

Propriété. Règle de Carson
La règle de Carson donne une approximation pratique de la **bande passante occupée à 98 %** par un signal FM :

$$\boxed{B_{\text{Carson}} = 2(\beta_f + 1)\, f_{m,\max}}$$

où $f_{m,\max}$ est la fréquence maximale du signal modulant. Cette bande contient au moins 98 % de la puissance totale.

Méthode.

1. Calculer β_f (méthode 3.1).
2. Identifier $f_{m,\max}$ (la plus haute fréquence du signal message).
3. Appliquer la règle de Carson :
$$B = 2(\beta_f + 1)\, f_{m,\max}$$
4. **Vérification par Bessel** (si la table est disponible) : compter le nombre de raies n significatives telles que $|J_n(\beta_f)| > 0{,}01$, puis $B = 2n\, f_m$.

Remarque.

- En FM à **large bande** ($\beta_f \gg 1$) : $B \approx 2\Delta f$ (la bande est dominée par l'excursion).
- En FM à **bande étroite** ($\beta_f \ll 1$) : $B \approx 2f_m$ (équivalent à l'AM).
- La règle de Carson **sous-estime** légèrement la bande réelle mais est universellement utilisée en ingénierie.

Exemple. Application : DE TE609 2024-2025, exercice 2 (c)
Calculer la bande de fréquence du signal FM de l'exercice précédent ($\beta_f = 5$, $f_m = 8$ Hz) définie par la règle de Carson.

Solution.

$$B = 2(\beta_f + 1)\, f_m = 2 \times (5 + 1) \times 8 = \boxed{96 \text{ Hz}}$$

La bande s'étend donc de $f_c - 48$ Hz à $f_c + 48$ Hz, soit de 1952 Hz à 2048 Hz.

3.4 Tracer le spectre FM normalisé à l'aide de la table de Bessel

Méthode.

1. Calculer β_f et identifier f_m.
2. **Lire la table de Bessel** à la colonne $\beta = \beta_f$: relever les valeurs $J_0, J_1, J_2, \ldots$ jusqu'à ce que $|J_n(\beta_f)| < 0{,}01$ (raies négligeables).
3. **Placer les raies** du spectre monolatéral normalisé (amplitudes $|J_n(\beta_f)|$) aux fréquences $f_c,\ f_c \pm f_m,\ f_c \pm 2f_m,\ \ldots$
4. Les amplitudes réelles des raies sont $A_c\, |J_n(\beta_f)|$; les puissances sont $\dfrac{A_c^2\, J_n^2(\beta_f)}{2}$.
5. **Par symétrie** : $J_{-n}(\beta_f) = (-1)^n J_n(\beta_f)$, donc $|J_{-n}| = |J_n|$, le spectre est symétrique autour de f_c.

Remarque.
Extrait de la table de Bessel (valeurs $J_n(\beta)$) :

n	$\beta = 0{,}5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$
0	0,938	0,765	0,224	−0,178	0,172
1	0,242	0,440	0,577	−0,328	0,235
2	0,031	0,115	0,353	0,047	−0,113
3		0,020	0,129	0,365	−0,291
4		0,002	0,034	0,391	−0,105
5			0,007	0,261	0,186
6			0,001	0,131	0,338

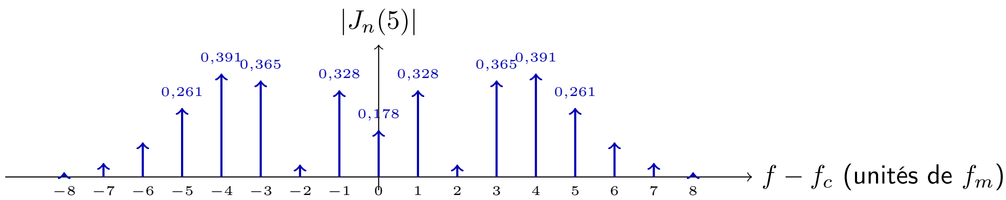
Pour $\beta = 5$, on retient les ordres $n = 0$ à $n = 8$ (ensuite $|J_n| < 0{,}01$).

Exemple. Application : DE TE609 2024-2025, exercice 2 (d)
À l'aide de la table de Bessel, tracer le spectre d'amplitude normalisé du signal FM avec $\beta_f = 5$, $f_c = 2000$ Hz, $f_m = 8$ Hz, $A_c = 10$ V.

Solution.
Pour $\beta_f = 5$, on lit dans la table les valeurs significatives :

n	$J_n(5)$	$\|J_n(5)\|$
0	−0,178	0,178
1	−0,328	0,328
2	0,047	0,047
3	0,365	0,365
4	0,391	0,391
5	0,261	0,261
6	0,131	0,131
7	0,053	0,053
8	0,018	0,018

Les raies du spectre monolatéral normalisé sont situées aux fréquences $f_c + nf_m$ avec les amplitudes $|J_n(5)|$. Le spectre est **symétrique** autour de f_c :



La règle de Carson ($B = 96$ Hz) correspond aux raies $n = \pm 6$ autour de f_c : au-delà, les amplitudes sont inférieures à 0,13, soit moins de 2 % de l'énergie.

3.5 Calculer la puissance totale et la puissance filtrée d'un signal FM

Propriété. Puissance d'un signal FM
La puissance totale d'un signal FM est **identique à celle de la porteuse non modulée** (la FM ne modifie pas l'amplitude) :

$$\boxed{P_{\text{tot}} = \frac{A_c^2}{2}}$$

Par la décomposition en série de Bessel, cette puissance se répartit entre toutes les raies spectrales :

$$P_{\text{tot}} = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta_f) = \frac{A_c^2}{2} \times 1$$

(propriété de Parseval des fonctions de Bessel : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) = 1$).
La puissance de la raie d'ordre n est :

$$\boxed{P_n = \frac{A_c^2}{2} J_n^2(\beta_f)}$$

La puissance dans une **bande filtrée** retenant les ordres $-N$ à $+N$ est :

$$\boxed{P_{\text{filtrée}} = \frac{A_c^2}{2} \left[J_0^2(\beta_f) + 2 \sum_{n=1}^{N} J_n^2(\beta_f) \right]}$$

Méthode.

1. Calculer la **puissance totale** : $P_{\text{tot}} = A_c^2/2$.
2. Identifier les raies **conservées par le filtre** : un filtre passe-bande centré sur f_c de largeur $B = 2Nf_m$ retient les ordres $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$.
3. Lire les $J_n(\beta_f)$ correspondants dans la table de Bessel.
4. Calculer $P_{\text{filtrée}} = \frac{A_c^2}{2} \left[J_0^2 + 2(J_1^2 + J_2^2 + \cdots + J_N^2) \right]$.
5. En déduire le **pourcentage de puissance conservée** :

$$\eta = \frac{P_{\text{filtrée}}}{P_{\text{tot}}} \times 100\,\%$$

Remarque.
Le facteur 2 devant la somme $\sum_{n=1}^{N}$ vient de la **symétrie** du spectre FM : la raie d'ordre $+n$ et la raie d'ordre $-n$ ont la même amplitude $|J_n|$, donc la même puissance.

Exemple. Application : DE TE609 2024-2025, exercice 2 (e 1 à 4)
La sortie $u(t)$ du modulateur FM ($A_c = 10$ V, $\beta_f = 5$, $f_m = 8$ Hz, $f_c = 2000$ Hz) est passée à travers un filtre passe-bande idéal centré sur f_c de largeur $B_{\text{filtre}} = 62$ Hz.

1. Calculer la puissance totale de $u(t)$ avant filtrage.
2. Déterminer le nombre de raies spectrales (spectre monolatéral) en sortie du filtre.
3. Calculer la puissance en sortie du filtre.
4. En déduire le pourcentage de puissance du signal modulant qui apparaît en sortie du filtre.

Solution.
Question 1 : Puissance totale.

$$P_{\text{tot}} = \frac{A_c^2}{2} = \frac{10^2}{2} = \boxed{50 \text{ W}}$$

Question 2 : Nombre de raies en sortie du filtre.
Le filtre de largeur $B_{\text{filtre}} = 62$ Hz conserve les raies situées à $|f - f_c| \le 31$ Hz, soit les ordres tels que

$|n|\, f_m \leq 31$ Hz :

$$|n| \leq \frac{31}{f_m} = \frac{31}{8} = 3{,}875 \implies |n| \leq 3$$

Le filtre retient les ordres $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, soit **7 raies bilatérales**. Côté monolatéral (fréquences positives) : les raies à f_c, $f_c + f_m$, $f_c + 2f_m$, $f_c + 3f_m$, soit

$$\boxed{\text{4 raies côté monolatéral}}$$

Question 3 : Puissance filtrée.
On lit dans la table de Bessel pour $\beta_f = 5$:

$$J_0(5) = -0{,}178, \quad J_1(5) = -0{,}328, \quad J_2(5) = 0{,}047, \quad J_3(5) = 0{,}365$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{filtrée}} &= \frac{A_c^2}{2}\left[J_0^2 + 2J_1^2 + 2J_2^2 + 2J_3^2\right] \\
&= \frac{100}{2}\left[0{,}178^2 + 2\times 0{,}328^2 + 2\times 0{,}047^2 + 2\times 0{,}365^2\right] \\
&= 50\,[0{,}032 + 2\times 0{,}108 + 2\times 0{,}002 + 2\times 0{,}133] \\
&= 50\,[0{,}032 + 0{,}215 + 0{,}004 + 0{,}267] \\
&= 50 \times 0{,}518 = \boxed{25{,}9\ \text{W}}
\end{aligned}$$

Question 4 : Pourcentage conservé.

$$\eta = \frac{P_{\text{filtrée}}}{P_{\text{tot}}} \times 100 = \frac{25{,}9}{50} \times 100 = \boxed{51{,}8\,\%}$$

Environ la moitié de la puissance du signal FM est contenue dans les 7 raies les plus proches de la porteuse. Les raies d'ordre 4 à 8, bien que nombreuses, transportent l'autre moitié.

4

Modulations numériques

Acquis d'Apprentissage.

- Identifier le type de modulation numérique (ASK, PSK, QAM) à partir du diagramme de constellation.
- Identifier le type de modulation à partir de la représentation temporelle (OOK, ASK, BPSK, DBPSK).
- Calculer le nombre de symboles M, le nombre de bits par symbole N, la rapidité de modulation R_s, le débit binaire R_b et la bande passante occupée.

Propriété. Paramètres fondamentaux d'une modulation numérique

- M : **nombre de symboles** (niveaux ou états distincts).
- $N = \log_2 M$: **nombre de bits par symbole**.
- T_s : **durée d'un symbole** [s] ; T_b : durée d'un bit [s] avec $T_s = N\,T_b$.
- $R_s = 1/T_s$: **rapidité de modulation** (débit symbole) [Baud].
- $R_b = 1/T_b = N \cdot R_s$: **débit binaire** [bit/s].
- B : **bande passante occupée** [Hz] ; pour une efficacité spectrale E_s [bits/s/Hz] : $B = R_b/E_s$.

$$\boxed{R_b = N \cdot R_s = \frac{\log_2 M}{T_s}}$$

4.1 Identifier le type de modulation depuis le diagramme de constellation

Définition. Diagramme de constellation
Un **diagramme de constellation** représente chaque symbole par un point dans le plan (axe en phase I, axe en quadrature Q). La position d'un point code simultanément l'amplitude et la phase du signal.

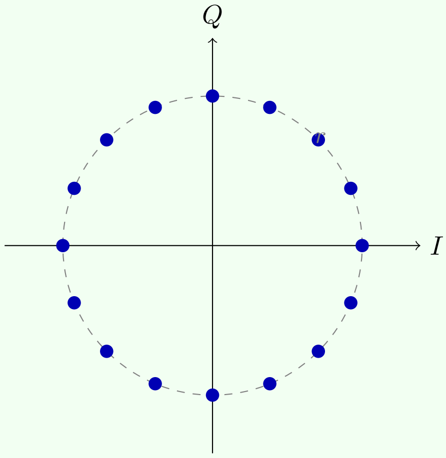
- **ASK / M-ASK** : points alignés sur un seul axe, à **amplitudes différentes**, **même phase**.
- **PSK / M-PSK** : points **équidistants sur un cercle**, **même amplitude**, **phases différentes**.
- **QAM / M-QAM** : points en **grille rectangulaire**, amplitudes **et** phases différentes.

Méthode.

1. **Compter** le nombre de points distincts dans la constellation $\to M$.
2. **Observer la géométrie** :
   - Tous les points **sur un cercle** (même distance à l'origine) **et régulièrement espacés en angle** $\to$ **M-PSK**.
   - Points **en grille** (plusieurs amplitudes *et* plusieurs phases) $\to$ **M-QAM**.
   - Points **sur un seul axe** (une seule dimension) $\to$ **M-ASK** (ou OOK si $M = 2$ et un point est à l'origine).
3. Calculer $N = \log_2 M$ (bits par symbole).
4. **Comparer PSK vs QAM** : pour un même M, la M-QAM espace mieux ses symboles $\to$ moins sensible au bruit ; la M-PSK est plus simple à implémenter.

Remarque.
Pour la **2-PSK** (BPSK) : 2 points à 0 et 180, c'est la modulation la plus robuste au bruit mais la moins efficace spectralement ($N = 1$ bit/symbole). Pour la **4-PSK** (QPSK) : 4 points à $45, 135, 225, 315$, $N = 2$ bits/symbole.

Exemple. Application : DE TE609 2024-2025, exercice 3
La figure ci-dessous montre le diagramme de constellation d'un signal modulé numériquement.



a) Quel type de modulation est représenté ? Justifier.

b) Combien de symboles M sont représentés ?

c) Combien de bits par symbole N sont utilisés ?

d) Si la rapidité de modulation est $R_s = 10\,000$ Baud, quel est le débit binaire R_b ?

e) Le 16-QAM serait-il **plus** ou **moins** sensible au bruit que cette modulation ? Justifier.

Solution.
a) Les 16 points sont tous à la **même distance de l'origine** (même amplitude) et sont **régulièrement répartis en angle** ($360/16 = 22{,}5$ entre deux points consécutifs). Il s'agit donc d'une modulation **16-PSK** (Phase Shift Keying à 16 états).

b) $\boxed{M = 16}$
c)

$$N = \log_2 M = \log_2 16 = \boxed{4 \text{ bits/symbole}}$$

d)

$$R_b = N \cdot R_s = 4 \times 10\,000 = \boxed{40 \text{ kbps}}$$

e) En 16-QAM, les symboles sont disposés en **grille rectangulaire** : pour un même nombre de symboles $M = 16$, la distance minimale entre deux points voisins est **plus grande** qu'en 16-PSK (où les points sont tous sur un cercle et peuvent être très proches en phase). La 16-QAM est donc **moins sensible au bruit** que la 16-PSK à puissance d'émission égale.

4.2 Identifier le type de modulation depuis la représentation temporelle

Définition. Modulations binaires de base
Pour une séquence binaire $b_k \in \{0, 1\}$ et une porteuse $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$:

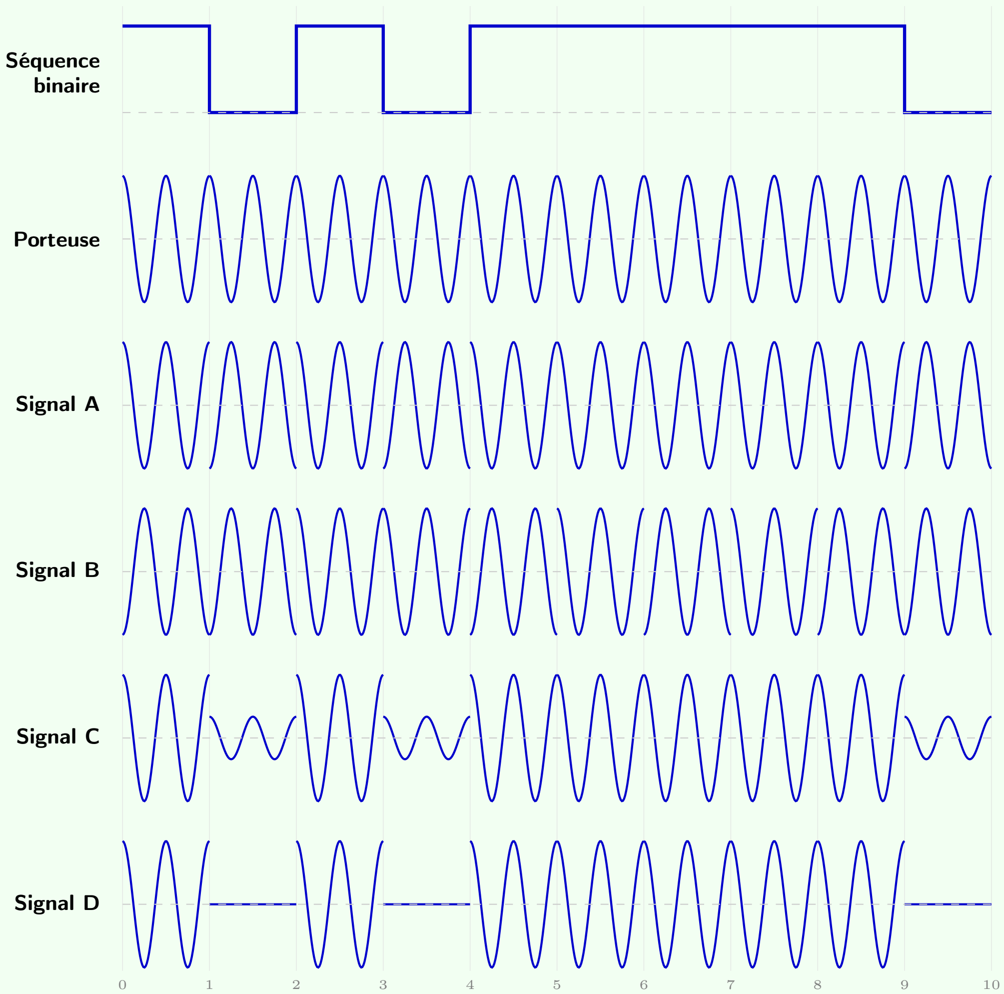
- **OOK** (*On-Off Keying*) : $1 \to$ porteuse présente (A_c) ; $0 \to$ silence (0).
- **ASK** (*Amplitude Shift Keying*, $M \geq 2$) : chaque symbole $\to$ amplitude différente ; la porteuse reste toujours présente (contrairement à l'OOK).
- **BPSK** (*Binary Phase Shift Keying*) : $1 \to$ phase 0 ; $0 \to$ phase 180 (inversion à chaque changement de bit).
- **DBPSK** (*Differential BPSK*) : le changement de phase (ou non) dépend du bit *courant* par rapport au bit *précédent* : $1 \to$ inversion de phase ; $0 \to$ pas d'inversion.

Méthode. Face à une représentation temporelle, observer successivement :

1. **L'amplitude** varie-t-elle ?
   - Oui, et certaines portions sont nulles → **OOK**.
   - Oui, mais toujours non nul → **ASK** ($M > 2$).
   - Non (amplitude constante) → PSK ou FM.
2. **La phase** change-t-elle ?
   - Oui, à chaque **changement de bit** (inversion à $0 \to 1$ ou $1 \to 0$) → **BPSK**.
   - Oui, mais uniquement quand le bit courant est **différent** du précédent (codage différentiel) → **DBPSK**.
3. Pour confirmer **BPSK vs DBPSK** : aligner la séquence binaire sous le signal et vérifier la règle de transition :
   - BPSK : inversion ⇔ changement de bit.
   - DBPSK : inversion ⇔ bit courant $= 1$.

Remarque.
Astuce DBPSK : construire la séquence différentielle $d_k = b_k \oplus b_{k-1}$ (XOR) ; une inversion de phase correspond à $d_k = 1$. Dans l'autre sens, pour *décoder* un signal DBPSK reçu, on compare chaque symbole au précédent.

Exemple. Application — DE TE609 2024-2025, exercice 4
La séquence binaire transmise est $1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0$. La figure ci-dessous montre la porteuse et quatre signaux modulés A, B, C, D.



Pour chacun des signaux A, B, C et D, identifier le type de modulation (parmi : ASK, OOK, BPSK, DBPSK) et **justifier clairement** votre réponse.

Solution.
Signal A — BPSK. L'amplitude est constante. On observe une **inversion de phase à chaque changement de bit** (aux transitions $1 \to 0$ et $0 \to 1$). Pendant la suite de cinq bits à 1 (positions 4 à 8), la phase ne change pas. C'est la signature du BPSK.

Signal B — DBPSK. L'amplitude est constante. L'inversion de phase se produit à chaque bit valant **1**, indépendamment du bit précédent. Ainsi, pendant la suite de cinq 1 consécutifs, la phase s'inverse à chaque période symbole. C'est le codage différentiel : l'information est portée par la *variation* de phase.

Signal C — ASK. La phase reste constante. L'amplitude alterne entre **deux niveaux non nuls** : grande amplitude pour le bit 1, petite amplitude (mais non nulle) pour le bit 0. La porteuse est toujours présente.

Signal D — OOK. L'amplitude est soit à sa valeur maximale (bit $= 1 \to$ porteuse présente), soit **nulle** (bit $= 0 \to$ silence complet). L'OOK est le cas particulier de l'ASK où le niveau bas vaut zéro.

Signal	Modulation	Critère discriminant
A	**BPSK**	Inversion de phase $\Leftrightarrow$ changement de bit
B	**DBPSK**	Inversion de phase $\Leftrightarrow$ bit courant $= 1$
C	**ASK**	Deux amplitudes $\neq 0$, phase constante
D	**OOK**	Amplitude nulle pour bit $= 0$

4.3 Calculer M, N, R_s, R_b et la bande passante

Méthode.

1. **Déterminer** M depuis l'énoncé (ex. 8-PSK $\Rightarrow M = 8$) ou depuis la constellation (compter les points).
2. **Calculer** N : $N = \log_2 M$ (nombre de bits/symbole).
3. **Rapidité de modulation** R_s [Baud] (= débit symbole) :
$$R_s = \frac{1}{T_s}$$
4. **Débit binaire** R_b [bit/s] :
$$\boxed{R_b = N \cdot R_s = \frac{\log_2 M}{T_s}}$$
5. **Durée d'un bit** :
$$T_b = \frac{T_s}{N} = \frac{1}{R_b}$$
6. **Bande passante occupée** B : selon l'efficacité spectrale E_s [bits/s/Hz] :
$$B = \frac{R_b}{E_s} = \frac{R_s}{E_s/N}$$
Si $E_s = N$ bits/s/Hz (idéalement limité à Nyquist) : $B = R_s$.

Remarque.
Règle mnémotechnique :

$$\underbrace{R_b}_{\text{débit bit}} = \underbrace{N}_{\text{bits/symbole}} \times \underbrace{R_s}_{\text{débit symbole}} = \log_2 M \times \frac{1}{T_s}$$

Augmenter M (plus de symboles) permet d'augmenter R_b sans augmenter R_s ni la bande passante, c'est le principe de l'**efficacité spectrale**.

Exemple. Application n°1 : DE TE609 2024-2025, exercice 3 (b, c, d)
Un signal 16-PSK est transmis avec une rapidité de modulation $R_s = 10\,000$ Baud.

b) Combien de symboles M ?
c) Combien de bits par symbole N ?
d) Quel est le débit binaire R_b ?

Solution.
b) La modulation 16-PSK utilise $\boxed{M = 16}$ symboles.
c)

$$N = \log_2 16 = \boxed{4 \text{ bits/symbole}}$$

d)

$$R_b = N \cdot R_s = 4 \times 10\,000 = \boxed{40 \text{ kbps}}$$

Exemple. Application n°2 : TD4, exercice 4.5 (Modulation 8-PSK)
On transmet un signal 8-PSK avec un temps symbole $T_s = 0{,}3$ ms et une efficacité spectrale $E_s = 2$ bits/s/Hz.

a) Calculer la rapidité de modulation R_s en Baud.
b) Calculer le débit binaire D.
c) Calculer l'encombrement spectral B.
d) Que devrait être la bande passante du canal de transmission ?

Solution.
a) Rapidité de modulation.

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{0{,}3 \times 10^{-3}} = \boxed{3\,333 \text{ Baud} \approx 3{,}33 \text{ kBaud}}$$

b) Débit binaire.
Pour une 8-PSK : $N = \log_2 8 = 3$ bits/symbole.

$$R_b = N \cdot R_s = 3 \times 3\,333 = \boxed{10\,000 \text{ bps} = 10 \text{ kbps}}$$

c) Encombrement spectral.

$$B = \frac{R_b}{E_s} = \frac{10\,000}{2} = \boxed{5\,000 \text{ Hz} = 5 \text{ kHz}}$$

d) Bande passante du canal.
Le canal doit avoir une largeur de bande **au moins égale** à l'encombrement spectral du signal :

$$\boxed{B_{\text{canal}} \geq 5 \text{ kHz}}$$

En pratique, on ajoute une marge pour compenser les imperfections du filtre.

5
Techniques d'accès multiple

Acquis d'Apprentissage.

- Distinguer les modes de transmission simplex, half-duplex et full-duplex et les associer à des exemples concrets.
- Caractériser les quatre techniques d'accès multiple FDMA, TDMA, CDMA et OFDMA et identifier leur usage dans les systèmes réels.

5.1 Distinguer simplex, half-duplex et full-duplex

Définition. Modes de communication

- **Simplex** : la communication s'effectue dans **une seule direction** ; l'émetteur et le récepteur sont fixes. Exemple : radio de diffusion, télévision hertzienne.
- **Half-duplex** : la communication peut se faire dans **les deux directions**, mais **pas simultanément**, les deux parties partagent le même canal et alternent. Exemple : talkie-walkie, réseau CB.
- **Full-duplex** : la communication se fait **simultanément dans les deux directions** grâce à deux canaux distincts (ou une technique de séparation). Exemple : téléphone mobile, téléphone fixe.

Méthode.
Face à une question de correspondance ou à choix multiples sur le mode de transmission :

1. **Identifier le sens du flux** : un seul sens $\rightarrow$ simplex ; deux sens possibles $\rightarrow$ half ou full.
2. **Vérifier la simultanéité** : les deux sens en même temps $\rightarrow$ full-duplex ; impossible en même temps (tour par tour) $\rightarrow$ half-duplex.
3. Associer au cas d'usage : diffusion publique $\rightarrow$ simplex ; radio professionnelle / talkie $\rightarrow$ half-duplex ; appel téléphonique / 4G/5G $\rightarrow$ full-duplex.

Exemple. Application : DE TE609 2024-2025, exercice 5 (Q1 et Q6)
Q1. Lequel des énoncés suivants décrit le mieux la liaison **full-duplex** ?

a) Les données circulent dans une seule direction sans retour.
b) La communication se fait dans une seule direction à la fois.
c) La communication se fait simultanément dans les deux directions.
d) Utilisée uniquement dans les systèmes analogiques.

Q6. Associez chaque mode à un exemple :

	Mode		Exemple
A.	Simplex	1.	Téléphone mobile
B.	Half-duplex	2.	Talkie-walkie
C.	Full-duplex	3.	Radio de diffusion

Solution.
Q1 : Réponse c). La définition du full-duplex est précisément que la communication **se fait simultanément dans les deux directions**, grâce à deux voies distinctes (fréquences ou câbles différents).

Q6 : Correspondances :

Mode	Exemple	Justification
A — Simplex	3. Radio de diffusion	Un émetteur, des récepteurs passifs, sens unique.
B — Half-duplex	2. Talkie-walkie	On appuie sur le bouton pour parler, chacun son tour.
C — Full-duplex	1. Téléphone mobile	Les deux interlocuteurs parlent et écoutent en même temps.

5.2 Caractériser et comparer FDMA, TDMA, CDMA et OFDMA

Définition. Techniques d'accès multiple
L'objectif des techniques d'accès multiple est de permettre à **plusieurs utilisateurs de partager efficacement les ressources d'un canal commun** (fréquence, temps, code).

- **FDMA** (*Frequency Division Multiple Access*) : chaque utilisateur dispose d'une **sous-bande de fréquence dédiée et permanente**. Limitation : nombre de fréquences disponibles fini → capacité limitée.
- **TDMA** (*Time Division Multiple Access*) : les utilisateurs **partagent la même fréquence** mais transmettent chacun à tour de rôle dans des **créneaux temporels** (slots) distincts.
- **CDMA** (*Code Division Multiple Access*) : tous les utilisateurs transmettent **simultanément sur la même bande de fréquence**, mais chacun est différencié par un **code pseudo-aléatoire orthogonal**. Utilisé en 3G (UMTS).
- **OFDMA** (*Orthogonal Frequency Division Multiple Access*) : combinaison de FDMA et de multi-porteuses orthogonales (OFDM). Chaque utilisateur se voit attribuer un **sous-ensemble de sous-porteuses orthogonales**. La conversion série/parallèle allonge la durée des symboles, réduisant l'ISI (Interférence Inter-Symbole). Utilisé en 4G (LTE) et 5G.

Méthode.
Face à une question d'identification ou de comparaison des techniques d'accès :

1. **Identifier la ressource partagée** : fréquence → FDMA ou OFDMA ; temps → TDMA ; codes → CDMA.
2. **Repérer le mot-clé** dans la question :
   - « sous-porteuses orthogonales » ou « LTE/4G » → **OFDMA**.
   - « créneaux temporels » ou « slots » → **TDMA**.
   - « codes pseudo-aléatoires » ou « 3G » → **CDMA**.
   - « bandes de fréquences dédiées » → **FDMA**.
3. Pour **OFDMA spécifiquement** : retenir que la conversion **série/parallèle** répartit le débit élevé sur plusieurs sous-porteuses → chaque symbole est plus long → l'ISI est réduite (mais pas supprimée, le préfixe cyclique s'en charge).

Récap.

Technique	**Ressource**	**Simultanéité**	**Usage typique**
FDMA	Fréquence (fixe)	Oui (bandes séparées)	Radio AM/FM, 1G
TDMA	Temps (slots)	Non (tour à tour)	GSM (2G)
CDMA	Codes orthogonaux	Oui (même bande)	UMTS (3G)
OFDMA	Sous-porteuses	Oui (orthogonalité)	LTE (4G), 5G

Exemple. Application — DE TE609 2024-2025, exercice 5 (Q2 à Q10)
Répondre aux questions suivantes (une seule réponse correcte par question) :

Q2. Dans un système TDMA, les utilisateurs partagent :

a) le spectre de fréquence en simultané
b) le temps sur un même canal de fréquence
c) des codes pseudo-aléatoires
d) des canaux à fréquences fixes

Q3. Quelle est la principale limitation du FDMA ?

a) nécessite des tampons de mémoire
b) interférence entre symboles
c) nombre limité de fréquences disponibles
d) complexité de codage

Q4. Quel système est utilisé dans la technologie LTE ?

a) CDMA
b) FDMA
c) TDMA
d) OFDMA

Q5. Une des caractéristiques de l'OFDMA est :

a) utilisation de codes pseudo-aléatoires
b) attribution de sous-porteuses orthogonales aux utilisateurs
c) transmission uniquement analogique
d) utilisation exclusive en liaison descendante

Q7. Associez chaque concept à son objectif :

Concept	**Objectif**
A. Conversion Série/Parallèle	1. Éviter les interférences
B. Sous-porteuses orthogonales	2. Séparer les utilisateurs (CDMA)
C. Codes orthogonaux	3. Réduction de l'ISI

Q8. Pourquoi la conversion série/parallèle est-elle utilisée dans les systèmes multi-porteuses à haut débit comme l'OFDM ?

a) pour augmenter la puissance du signal transmis
b) pour répartir le débit élevé sur plusieurs sous-porteuses et allonger la durée des symboles, ce qui réduit l'ISI
c) pour concentrer tout le signal sur une seule fréquence porteuse
d) pour supprimer complètement l'Interférence Inter-Canal (ICI)

Q9. Quel est l'objectif principal des techniques d'accès multiple ?

a) permettre à plusieurs utilisateurs de partager efficacement les ressources du canal
b) réduire le débit global du réseau
c) augmenter la puissance de transmission
d) limiter la portée des signaux radio

Q10. Quel est l'avantage principal de l'OFDM par rapport au FDM classique ?

a) il utilise des sous-porteuses espacées plus largement
b) il supprime complètement l'ISI sans égalisation
c) il nécessite moins de traitement numérique que le FDM
d) il permet une meilleure efficacité spectrale grâce à l'orthogonalité des sous-porteuses

Solution.

Q2 — Réponse : b.
En TDMA, tous les utilisateurs partagent **la même fréquence** mais chacun occupe un **créneau temporel** distinct ; ils transmettent à tour de rôle, pas simultanément.

Q3 — Réponse : c.
Le FDMA alloue une bande fixe à chaque utilisateur. Comme le spectre est fini, le **nombre de fréquences disponibles** est limité, ce qui plafonne le nombre d'utilisateurs simultanés.

Q4 — Réponse : d.
Le standard LTE (4G) utilise **OFDMA** en liaison descendante et SC-FDMA en liaison montante.

Q5 — Réponse : b.
L'OFDMA attribue à chaque utilisateur un **sous-ensemble de sous-porteuses orthogonales**, permettant de partager le spectre sans interférence inter-canal (ICI).

Q7 — Correspondances :

Concept	**Objectif**	**Justification**
A — Conv. S/P	3. Réduction ISI	Allonge T_s : chaque symbole dure plus longtemps, l'ISI diminue.
B — Sous-port. orthogonales	1. Éviter les interférences	L'orthogonalité garantit qu'aucune sous-porteuse ne perturbe les autres.
C — Codes orthogonaux	2. Séparer utilisateurs CDMA	Chaque utilisateur a un code unique ; le récepteur filtre les autres.

Q8 — Réponse : b.
La conversion série/parallèle **répartit le débit élevé sur plusieurs sous-porteuses** : chaque sous-porteuse transporte une fraction du débit, ce qui **allonge la durée des symboles** et réduit l'ISI.

Q9 — Réponse : a.
L'objectif est de **permettre à plusieurs utilisateurs de partager efficacement les ressources du canal** tout en minimisant les interférences.

Q10 — Réponse : d.
L'OFDM exploite l'**orthogonalité** des sous-porteuses pour les faire se chevaucher spectralement sans interférence mutuelle, d'où une **meilleure efficacité spectrale** que le FDM classique.