

Fiche Méthodes - TE601

Un recueil de méthodes pour accompagner les révisions de Théorie du Signal 1

DORYAN DENIS

Table des matières

1	Classification, mesures et corrélation	2
1.1	Reconnaître et manipuler les signaux singuliers	2
1.2	Calculer la valeur moyenne et la puissance d'un signal T-périodique	4
1.3	Calculer l'énergie d'un signal à énergie finie	5
1.4	Calculer la fonction d'autocorrélation d'un signal	5
1.5	Calculer l'intercorrélation de deux signaux	7
2	Développement en série de Fourier	8
2.1	Calculer les coefficients λ_k d'un DSF par intégrale directe	8
2.2	Exploiter la parité d'un signal pour simplifier le DSF	9
2.3	Linéariser un produit trigonométrique pour lire le DSF	10
2.4	Calculer la puissance partielle à l'ordre N et évaluer la largeur de bande	12
3	Produit de convolution	13
3.1	Calculer un produit de convolution par la méthode graphique	13
3.2	Déterminer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire	15
3.3	Calculer la réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque	16
4	Transformation de Fourier	18
4.1	Calculer la transformée de Fourier d'un signal usuel	18
4.2	Appliquer les propriétés de la transformée de Fourier	20
4.3	Calculer la transformée de Fourier d'un signal T -périodique	21
4.4	Calculer la densité spectrale d'énergie et appliquer Parseval	22
4.5	Appliquer le théorème de Shannon à l'échantillonnage	23
5	Transformation de Laplace	25
5.1	Calculer la transformée de Laplace d'un signal causal et appliquer les propriétés	26
5.2	Inverser une transformée de Laplace par décomposition en éléments simples	27
5.3	Analyser la réponse d'un système linéaire par la TL	29
5.4	Résoudre une équation différentielle à coefficients constants par la TL	31

Acquis d'Apprentissage.

- Reconnaître et manipuler les distributions usuelles (Dirac, Heaviside, porte).
- Calculer la valeur moyenne, la puissance et l'énergie d'un signal.
- Calculer les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation.

1.1 Reconnaître et manipuler les signaux singuliers**Définition.** Distributions usuelles

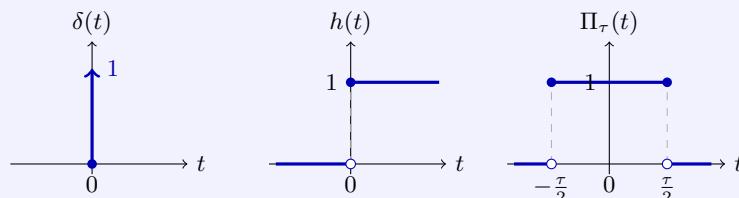
Les **signaux singuliers** sont des modèles théoriques fondamentaux :

- **Distribution de Dirac** $\delta(t)$: impulsion de surface 1. Propriété fondamentale (filtrage) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t - \tau) dt = \varphi(\tau)$$

Changement d'échelle : $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$. Parité : $\delta(-t) = \delta(t)$.

- **Fonction de Heaviside** $h(t)$: $h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ Lien : $h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$.
- **Porte de largeur τ** : $\Pi_{\tau}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-\frac{\tau}{2}, +\frac{\tau}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ Lien : $\delta(t) = \frac{1}{\tau} \lim_{\tau \rightarrow 0} \Pi_{\tau}(t)$.

**Méthode.**

Pour manipuler un signal singulier (représenter, transformer, intégrer) :

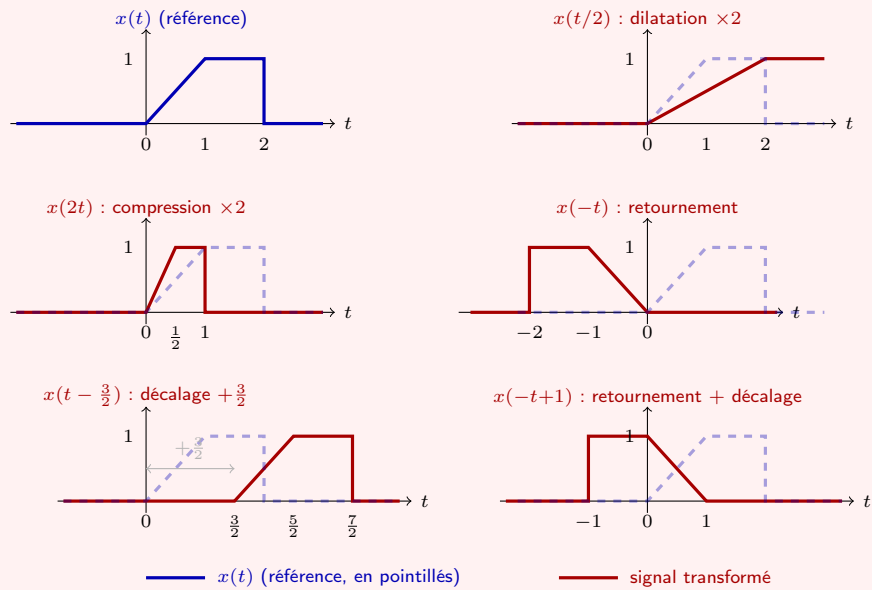
1. **Identifier le signal de base** (δ , h ou Π_{τ}).
2. **Appliquer les transformations** dans cet ordre : changement d'échelle ($t \rightarrow at$), puis translation ($t \rightarrow t - t_0$).
3. **Pour une intégrale contenant δ** : utiliser la propriété de filtrage $\int \varphi(t) \delta(t - \tau) dt = \varphi(\tau)$.
4. **Pour une convolution avec δ** : utiliser $x(t) * \delta(t - \theta) = x(t - \theta)$ (retard pur).

Propriété. Transformations de la variable temporelle

Soit $x(t)$ un signal de référence. Les transformations de l'argument $t \rightarrow at - b$ modifient sa représentation graphique selon les règles suivantes, à appliquer dans cet ordre :

1. **Changement d'échelle** $t \rightarrow at$ ($a > 0$) :
 - $a > 1$: le signal se **comprime** horizontalement (les événements arrivent plus vite).
 - $0 < a < 1$: le signal se **dilate** horizontalement (les événements arrivent plus lentement).
2. **Retournement** $t \rightarrow -t$: le signal se **retourne** autour de l'axe des ordonnées (symétrie par rapport à $t = 0$).
3. **Translation** $t \rightarrow t - t_0$: le signal se **décalle** de t_0 vers la droite ($t_0 > 0$) ou vers la gauche ($t_0 < 0$).

Cas général $x(at - b)$: factoriser d'abord sous la forme $x\left(a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right)$ — le signal est d'abord mis à l'échelle par a , puis décalé de b/a .



Remarque.

$\delta_\tau(t)$ désigne dans ce cours une porte *normalisée* de largeur τ : $\delta_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \Pi_\tau(t)$. Ne pas confondre avec $\delta(t - \tau)$ (Dirac retardé de τ).

Ordre des opérations pour $x(at - b)$: toujours factoriser en $x\left(a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right)$ avant de dessiner — appliquer d'abord le changement d'échelle a , puis la translation b/a . Ne jamais traduire avant de mettre à l'échelle.

Exemple. Application n°1 — tiré du CE 2025/2026

Expliciter les signaux $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définis par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \delta(u) du, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(u) \delta(u) du, \quad z(t) = h(t - 2) * \delta(t - 1).$$

Solution.

Signal $x(t)$: Par définition de la primitive de δ ,

$$x(t) = h(t)$$

car $h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$.

Signal $y(t)$: On applique la propriété de filtrage avec $\varphi(u) = \cos(u)$ et $\tau = 0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(u) \delta(u) du = \cos(0) = \boxed{1}$$

(résultat *constant*, indépendant de t).

Signal $z(t)$: On utilise la propriété de retard de la convolution avec δ :

$$z(t) = h(t - 2) * \delta(t - 1) = \boxed{h(t - 3)}$$

La convolution avec $\delta(t - 1)$ retarde le signal de 1 : $2 + 1 = 3$.

1.2 Calculer la valeur moyenne et la puissance d'un signal T-périodique

Définition. Valeur moyenne, puissance, énergie

Pour un signal réel $x(t)$:

- **Valeur moyenne** (signal T -périodique) : $X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$
- **Puissance** (signal T -périodique) : $P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$
- **Énergie** (signal à énergie finie) : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$

Méthode.

1. **Lire le chronogramme** et identifier la période T et le modèle mathématique de $x(t)$ sur une période (en général deux morceaux).
2. **Calculer** X_0 en intégrant sur $[0, T[$ puis en divisant par T .
3. **Calculer** P_x en intégrant $x^2(t)$ sur $[0, T[$ puis en divisant par T . Utiliser les formules de linéarisation si $x(t)$ contient des sinus/cosinus ($\cos^2 = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, etc.).
4. Vérifier : $P_x \geq X_0^2$ (inégalité de Jensen, avec égalité si x est constant).

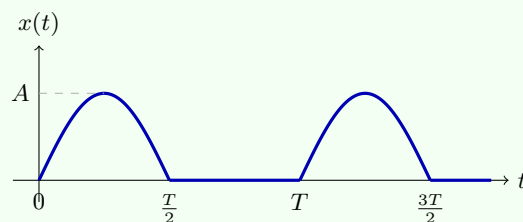
Remarque.

Pour un signal *pair* ou *impair* par rapport à l'axe vertical, on peut intégrer sur la demi-période et doubler, ce qui simplifie parfois le calcul. Si $x(t) = 0$ sur la moitié de la période (signal monoalternance), seule la partie non nulle contribue à P_x et X_0 .

Exemple. Application n°1 — tiré du CE 2025/2026

Soit $x(t)$ un signal T -périodique correspondant à un sinusoïde monoalternance d'amplitude A et de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$x(t) = \begin{cases} A \sin(\omega t) & t \in [0, \frac{T}{2}[\\ 0 & t \in [\frac{T}{2}, T[\end{cases}$$



Calculer X_0 et P_x .

Solution.

Valeur moyenne :

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{A}{T} \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{A}{T\omega} \left[-\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \cos(0) \right] = \frac{A}{T\omega} [-\cos(\pi) + 1] \end{aligned}$$

Comme $\omega T = 2\pi$:

$$\boxed{X_0 = \frac{A}{\pi}}$$

Puissance :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{A^2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt$$

$$= \frac{A^2}{2T} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{A^2}{2T} \cdot \frac{T}{2} = \boxed{\frac{A^2}{4}}$$

1.3 Calculer l'énergie d'un signal à énergie finie

Méthode.

1. Vérifier que le signal est à **énergie finie** : $x(t)$ doit s'annuler en $\pm\infty$ (par exemple exponentielle décroissante, porte).
2. Réduire le domaine d'intégration au **support** de $x(t)$ (là où $x(t) \neq 0$).
3. Calculer $E_x = \int_{\text{support}} x^2(t) dt$. Pour une exponentielle : utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\tau}{2}$.

Exemple. Application n°1 — tiré du TD Chap. 1

Calculer l'énergie des signaux :

- $x(t) = A \cdot \Pi_T(t)$ (porte de largeur T et d'amplitude A),
- $y(t) = A \cdot h(t) e^{-t/\tau}$ (exponentielle causale d'amplitude A).

Solution.

Énergie de $x(t)$: Le support de $\Pi_T(t)$ est $[-T/2, T/2]$, où $x(t) = A$.

$$E_x = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \boxed{A^2 T}$$

Énergie de $y(t)$: $y(t) = A e^{-t/\tau}$ pour $t \geq 0$, nul sinon.

$$E_y = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2t/\tau} dt = A^2 \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{+\infty} = A^2 \cdot \frac{\tau}{2} = \boxed{\frac{A^2 \tau}{2}}$$

1.4 Calculer la fonction d'autocorrélation d'un signal

Définition. Autocorrélation

La **fonction d'autocorrélation** de $x(t)$ mesure la ressemblance du signal avec lui-même décalé de τ :

- Signal à **énergie finie** : $\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt$
- Signal **T -périodique** : $\Gamma_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t - \tau) dt$

Propriété. Propriétés de l'autocorrélation

Pour $x(t)$ réel :

- **Parité** : $\Gamma_x(\tau) = \Gamma_x(-\tau)$ (fonction paire).
- **Maximum en 0** : $\forall \tau, |\Gamma_x(\tau)| \leq \Gamma_x(0)$.
- Signal à énergie finie : $\Gamma_x(0) = E_x$ (énergie du signal).
- Signal T -périodique : $\Gamma_x(0) = P_x$ (puissance du signal).
- Périodicité (si x est T -périodique) : $\Gamma_x(\tau + T) = \Gamma_x(\tau)$.

Méthode.

1. **Esquisser** $x(t)$ et $x(t - \tau)$ (signal décalé de τ) sur le même repère.
2. **Identifier les plages de τ** où le support du produit $x(t) \cdot x(t - \tau)$ change de forme (en général 3 à 5 plages).
3. **Calculer l'intégrale** sur chaque plage en ajustant les bornes d'intégration.
4. **Vérifier** : $\Gamma_x(0) = E_x$ (ou P_x) ; Γ_x est paire.

Remarque.

Le calcul graphique est le même que pour une convolution, à ceci près qu'on retourne x (et non y) autour de l'origine. En pratique, pour $x(t) = A \cdot \Pi_T(t)$, le résultat est un signal **triangulaire** de base $2T$ et de sommet A^2T en $\tau = 0$.

Exemple. Application n°1 — tiré du CE 2025/2026

Soit $x(t) = A \cdot \Pi_T(t)$ (porte d'amplitude A centrée en 0, de largeur T).

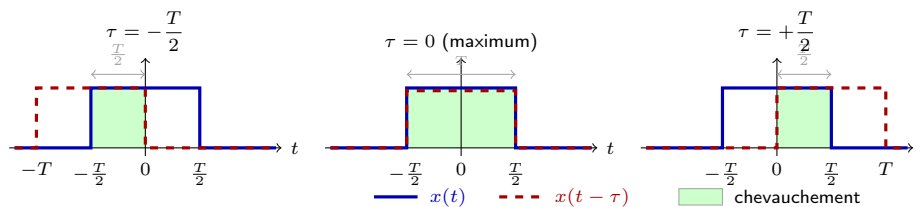
1. Calculer l'énergie E_x .
2. Déterminer $\Gamma_x(\tau)$ et la représenter graphiquement.
3. Commenter la parité de Γ_x .
4. Vérifier $\Gamma_x(0)$.

Solution.

1. Énergie :

$$E_x = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \boxed{A^2T}$$

2. Autocorrélation : $x(t) = A$ pour $t \in [-T/2, T/2]$, nul ailleurs. $x(t - \tau) = A$ pour $t \in [\tau - T/2, \tau + T/2]$.
Le produit $x(t) \cdot x(t - \tau) = A^2$ sur l'intersection des deux supports, vide sinon.



- $\tau \leq -T$ ou $\tau \geq T$: supports disjoints $\Rightarrow \Gamma_x(\tau) = 0$.
- $\tau \in [-T, 0]$: intersection $= [\tau - T/2, T/2] \cap [-T/2, T/2] = [\tau + T/2 - T, T/2]$... longueur $= T - |\tau|$.

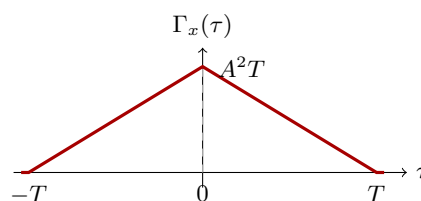
$$\Gamma_x(\tau) = A^2(T + \tau), \quad \tau \in [-T, 0].$$

- $\tau \in [0, T]$: par parité,

$$\Gamma_x(\tau) = A^2(T - \tau).$$

En résumé :

$$\Gamma_x(\tau) = \begin{cases} A^2(T - |\tau|) & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$



3. Parité : $\Gamma_x(\tau) = A^2(T - |\tau|) = \Gamma_x(-\tau)$: Γ_x est bien paire.

4. Vérification : $\Gamma_x(0) = A^2T = E_x$. ✓

1.5 Calculer l'intercorrélation de deux signaux

Définition. Intercorrélation

La **fonction d'intercorrélation** de $x(t)$ et $y(t)$ mesure leur ressemblance mutuelle décalée de τ :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt \quad (\text{signaux à énergie finie})$$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t - \tau) dt \quad (\text{signaux } T\text{-périodiques})$$

Propriété. Propriétés de l'intercorrélation

- **Non-commutativité** : $\Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma_{yx}^*(-\tau)$. Pour des signaux réels : $\Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma_{yx}(-\tau)$.
- **Retard** : si $x_\theta(t) = x(t - \theta)$, alors $\Gamma_{x_\theta y}(\tau) = \Gamma_{xy}(\tau - \theta)$.

Méthode.

Même démarche que pour l'autocorrélation :

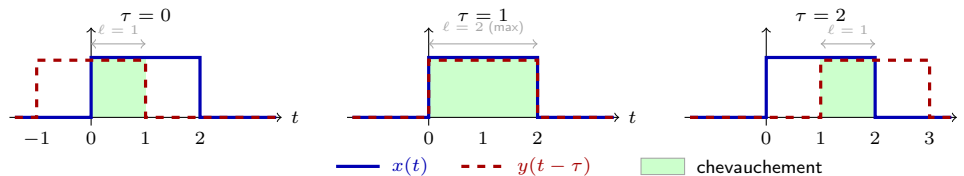
1. Esquisser $x(t)$ et $y(t - \tau)$ (retourner y et décaler).
2. Identifier les plages de τ où les supports se chevauchent.
3. Intégrer sur chaque plage.
4. Vérifier par la non-commutativité : calculer $\Gamma_{yx}(-\tau)$ et comparer.

Exemple. Application n°1 — tiré du TD Chap. 1

Soit $x(t) = \Pi_2(t - 1)$ (porte de largeur 2 centrée en $t = 1$) et $y(t) = \Pi_2(t)$ (porte de largeur 2 centrée en $t = 0$). Calculer $\Gamma_{xy}(\tau)$.

Solution.

$x(t) = 1$ pour $t \in [0, 2]$, nul ailleurs. $y(t) = 1$ pour $t \in [-1, 1]$, nul ailleurs. $y(t - \tau) = 1$ pour $t \in [\tau - 1, \tau + 1]$.



L'intégrale vaut 1 (amplitude 1×1) fois la longueur de l'intersection $[0, 2] \cap [\tau - 1, \tau + 1]$.

- $\tau < -1$ ou $\tau > 3$: intersection vide $\Rightarrow \Gamma_{xy}(\tau) = 0$.
- $\tau \in [-1, 1]$: intersection $= [\tau - 1, \tau + 1] \cap [0, 2] = [0, \tau + 1]$, longueur $\tau + 1$.

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \tau + 1.$$

- $\tau \in [1, 3]$: intersection $= [\tau - 1, 2]$, longueur $3 - \tau$.

$$\Gamma_{xy}(\tau) = 3 - \tau.$$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \begin{cases} \tau + 1 & \tau \in [-1, 1] \\ 3 - \tau & \tau \in [1, 3] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Vérification : $\Gamma_{yx}(\tau) = \Gamma_{xy}(-\tau)$, c'est-à-dire Γ_{yx} est le même triangle mais centré en $\tau = -1$ (le signal y précède x d'une unité de temps). ✓

Développement en série de Fourier

Acquis d'Apprentissage.

- Calculer les coefficients λ_k d'un DSF par intégrale directe.
- Exploiter la parité d'un signal pour simplifier le calcul.
- Linéariser un produit trigonométrique pour lire le DSF immédiatement.
- Calculer la puissance d'un signal périodique par le théorème de Parseval.

Récap.

Tout signal $x(t)$ T -périodique admet un développement en série de Fourier (DSF) :

$$\Phi_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} \lambda_k e^{jk\omega t} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les **coefficients complexes** λ_k (coordonnées dans la base $\{e^{jk\omega t}\}$) sont :

$$\lambda_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad \lambda_0 = \overline{x(t)} = X_0$$

Deux formes explicites équivalentes (pour $x(t)$ réel) :

$$\Phi_N(t) = \lambda_0 + 2 \sum_{k=1}^N |\lambda_k| \cos(k\omega t + \theta_k) \quad (1^{\text{re}} \text{ forme})$$

$$\Phi_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad (2^{\text{e}} \text{ forme})$$

avec $a_0 = \lambda_0$, $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt$, $b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt$.

2.1 Calculer les coefficients λ_k d'un DSF par intégrale directe

Méthode.

1. **Identifier** la période T , la pulsation $\omega = 2\pi/T$, et le modèle mathématique de $x(t)$ sur une période.
2. **Calculer** λ_0 : c'est la valeur moyenne $\lambda_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$.
3. **Calculer** λ_k ($k \neq 0$) par intégration par parties ou en décomposant l'intégrale selon les morceaux de $x(t)$:

$$\lambda_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt$$

4. **Vérifier** la parité spectrale : pour $x(t)$ réel, $\lambda_{-k} = \lambda_k^*$, donc $|\lambda_{-k}| = |\lambda_k|$ et $\theta_{-k} = -\theta_k$.
5. **Écrire le DSF** sous la forme la plus concise demandée (forme exponentielle, 1^{re} ou 2^e forme explicite).

Remarque. Intégrale utile

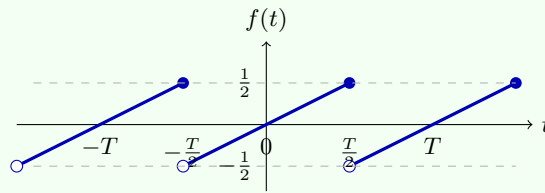
Pour un signal $x(t) = A$ constant sur $[0, \alpha T]$ et nul sur $[\alpha T, T]$ (rapport cyclique α), l'intégrale donne :

$$\lambda_k = \frac{A}{T} \int_0^{\alpha T} e^{-jk\omega t} dt = \frac{A\alpha e^{-jk\pi\alpha} \sin(k\pi\alpha)}{k\pi\alpha} = A\alpha \operatorname{sinc}(k\pi\alpha) e^{-jk\pi\alpha}$$

Pour un rapport cyclique $\alpha = 1/2$ (signal carré), $\lambda_k = 0$ pour k pair non nul.

Exemple. Application n°1 — tiré du DE 2025/2026

Soit $f(t)$ le signal suivant :



1. Proposer un modèle mathématique pour $f(t)$ et calculer sa puissance P_F .
2. Déterminer l'expression générale des coefficients λ_k .
3. Expliciter $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Solution.

1. Modèle et puissance :

$$f(t) = \frac{t}{T} \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad P_F = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{1}{T^3} \cdot \frac{2(T/2)^3}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

2. Coefficients λ_k :

$$\lambda_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{t}{T} e^{-jk\omega t} dt$$

Pour $k = 0$: $\lambda_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{t}{T} dt = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique).

$$\boxed{\lambda_0 = 0}$$

Pour $k \neq 0$, intégration par parties avec $u = t/T$ et $dv = e^{-jk\omega t} dt$:

$$\lambda_k = \frac{1}{T} \left[\frac{t}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega t}}{jk\omega} dt$$

Le second terme est nul (intégrale de $e^{-jk\omega t}$ sur une période). Le premier terme :

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{-jk\omega T} \left[\frac{T}{2} e^{-jk\pi} - \left(-\frac{T}{2}\right) e^{jk\pi} \right] = \frac{1}{-jk\omega T} \cdot \frac{e^{-jk\pi} + e^{jk\pi}}{2} = \frac{\cos(k\pi)}{-jk\omega T}$$

Comme $\omega T = 2\pi$ et $\cos(k\pi) = (-1)^k$:

$$\boxed{\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2j\pi k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2j\pi k}, \quad k \neq 0}$$

3. Valeurs numériques :

k	0	1	2	3	4
λ_k	0	$\frac{1}{2j\pi}$	$\frac{-1}{4j\pi}$	$\frac{1}{6j\pi}$	$\frac{-1}{8j\pi}$

2.2 Exploiter la parité d'un signal pour simplifier le DSF

Propriété. Parité et coefficients du DSF

Pour $x(t)$ réel :

- $x(t)$ **pair** $\Rightarrow \lambda_k \in \mathbb{R}, b_k = 0$ (DSF en cosinus uniquement).
- $x(t)$ **impair** $\Rightarrow \lambda_k$ imaginaire pur, $a_k = 0$ (DSF en sinus uniquement, et $\lambda_0 = 0$).
- $x(t)$ **ni pair ni impair** : décomposer $x = x_{\text{pair}} + x_{\text{impair}}$ ou calculer directement.

Méthode.

1. Examiner la **parité** de $x(t)$: tracer $x(-t)$ et comparer à $x(t)$.
2. Si x est **pair** : calculer seulement $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(k\omega t) dt$ (on intègre sur la demi-période et on multiplie par 2).
3. Si x est **impair** : calculer seulement $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(k\omega t) dt$.
4. Si x n'est **ni pair ni impair** mais peut être rendu pair ou impair par un **changement d'origine** des temps : effectuer ce changement, calculer le DSF du signal translaté, puis corriger la phase par la propriété de retard $\lambda_k^{\text{original}} = \lambda_k^{\text{translaté}} e^{-jk\omega t_0}$.

Remarque.

Un signal en **dents de scie** centré est impair $\Rightarrow \lambda_k$ imaginaires purs. Un signal **carré centré** est impair si l'alternance positive commence après l'origine, pair si la période est symétrique par rapport au milieu de l'alternance positive. Prendre le temps de vérifier graphiquement avant de calculer.

Exemple. Application n°1 — tiré du TD Chap. 2

Soit $y(t)$ un signal T -périodique en dents de scie défini par $y(t) = A(\frac{t}{T} - \frac{1}{2})$ sur $[0, T[$. Étudier sa parité après centrage, puis développer $y(t)$ en série de Fourier.

Solution.

Étude de la parité : En posant $t_0 = T/2$, le signal centré est $\tilde{y}(t) = y(t + T/2) = A \cdot t/T$ sur $[-T/2, T/2[$, qui est **impair**.

DSF du signal centré $\tilde{y}(t)$: Par la méthode précédente (résultat de l'exemple 2.1) avec amplitude A :

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{A(-1)^{k+1}}{2j\pi k}, \quad k \neq 0, \quad \tilde{\lambda}_0 = 0.$$

Bien impair : $\tilde{\lambda}_k$ imaginaires purs. ✓

Retour au signal original $y(t) = \tilde{y}(t - T/2)$: Propriété de retard : $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k e^{-jk\omega(T/2)} = \tilde{\lambda}_k e^{-jk\pi}$

$$\lambda_k = \frac{A(-1)^{k+1}}{2j\pi k} \cdot (-1)^k = \frac{A \cdot (-1)^{2k+1}}{2j\pi k} = \frac{-A}{2j\pi k} = \frac{A}{2j\pi k} \cdot (-1)$$

$$\lambda_k = \frac{jA}{2\pi k}, \quad k \neq 0$$

Le DSF en 2^e forme (sinus uniquement car $a_k = 0$) :

$$y(t) = -\frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\omega t)}{k}$$

2.3 Linéariser un produit trigonométrique pour lire le DSF

Méthode.

La voie la plus directe est de tout convertir en **exponentielles complexes** via les formules d'Euler, puis de développer le produit : les λ_k se lisent immédiatement comme coefficients de chaque $e^{jk\omega t}$.

1. **Remplacer** chaque fonction trigonométrique par sa forme exponentielle :

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}, \quad \sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

2. **Développer** le produit algébriquement en multipliant les exponentielles : $e^{jm\omega t} \cdot e^{jn\omega t} = e^{j(m+n)\omega t}$.
3. **Regrouper** les termes de même exposant k : le coefficient devant $e^{jk\omega t}$ est directement λ_k .
4. **Vérifier** la parité spectrale : pour $x(t)$ réel, $\lambda_{-k} = \lambda_k^*$ doit être satisfait.
5. **Lire** a_k et b_k depuis les λ_k : $a_k = 2 \operatorname{Re}(\lambda_k)$, $b_k = -2 \operatorname{Im}(\lambda_k)$.

Remarque.

La **fréquence fondamentale** ω_0 est déterminée par le PGCD des fréquences présentes dans les exponentielles après développement. Pour $\sin(\omega t) \cos^2(2\omega t)$, on obtient des termes en $e^{\pm j\omega t}$, $e^{\pm 3j\omega t}$, $e^{\pm 5j\omega t}$: le PGCD des fréquences ω , 3ω , 5ω est bien ω , donc $T = 2\pi/\omega$. La méthode exponentielle est plus sûre que les formules de produit-vers-somme car elle ne nécessite aucune mémorisation de formules : une seule règle $e^{ja} \cdot e^{jb} = e^{j(a+b)}$ suffit.

Exemple. Application n°1 — tiré du CE 2025/2026

Soit $y(t) = \sin(\omega t) \cdot \cos^2(2\omega t)$ avec $T = 2\pi/\omega$.

1. Linéariser $y(t)$ par la forme exponentielle et en déduire tous les coefficients λ_k , a_k , b_k jusqu'à l'ordre $N = 5$.
2. En déduire la puissance P_y .

Solution.

1. Passage en exponentielles :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}, \quad \cos(2\omega t) = \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2}$$

On calcule d'abord $\cos^2(2\omega t)$:

$$\cos^2(2\omega t) = \left(\frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{j4\omega t} + 2 + e^{-j4\omega t}}{4}$$

Développement du produit :

$$y(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot \frac{e^{j4\omega t} + 2 + e^{-j4\omega t}}{4} = \frac{1}{8j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) (e^{j4\omega t} + 2 + e^{-j4\omega t})$$

On distribue terme à terme ($e^{ja} \cdot e^{jb} = e^{j(a+b)}$) :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8j} \left[e^{j(1+4)\omega t} + 2e^{j\omega t} + e^{j(1-4)\omega t} \right. \\ &\quad \left. - e^{j(-1+4)\omega t} - 2e^{-j\omega t} - e^{j(-1-4)\omega t} \right] \\ &= \frac{1}{8j} \left[e^{j5\omega t} + 2e^{j\omega t} + e^{-j3\omega t} - e^{j3\omega t} - 2e^{-j\omega t} - e^{-j5\omega t} \right] \end{aligned}$$

Lecture directe des λ_k (coefficient de $e^{jk\omega t}$) :

$$\lambda_5 = \frac{1}{8j}, \quad \lambda_1 = \frac{2}{8j} = \frac{1}{4j}, \quad \lambda_{-3} = \frac{1}{8j}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{8j}, \quad \lambda_{-1} = -\frac{1}{4j}, \quad \lambda_{-5} = -\frac{1}{8j}$$

Tous les autres λ_k sont nuls.

Vérification de la parité spectrale : $\lambda_{-k} = \lambda_k^*$? $\bar{\lambda}_1 = \bar{\frac{1}{4j}} = -\frac{1}{4j} = \lambda_{-1} \checkmark$ $\bar{\lambda}_3 = \bar{-\frac{1}{8j}} = \frac{1}{8j} = \lambda_{-3} \checkmark$

Tableau des coefficients :

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
λ_k	$-\frac{1}{8j}$	0	$\frac{1}{8j}$	0	$-\frac{1}{4j}$	0	$\frac{1}{4j}$	0	$-\frac{1}{8j}$	0	$\frac{1}{8j}$
a_k						0	0	0	0	0	0
b_k						0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

($a_k = 2\text{Re}(\lambda_k) = 0$ car les λ_k sont imaginaires purs ; $b_k = -2\text{Im}(\lambda_k)$.)

2. Puissance par Parseval :

$$P_y = \sum_k |\lambda_k|^2 = 2|\lambda_1|^2 + 2|\lambda_3|^2 + 2|\lambda_5|^2 = \frac{2}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{64} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \boxed{\frac{3}{16}}$$

2.4 Calculer la puissance partielle à l'ordre N et évaluer la largeur de bande

Propriété. Théorème de Parseval

La puissance totale d'un signal T -périodique est égale à la somme des puissances de ses harmoniques :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^2 = \lambda_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

La **puissance partielle** à l'ordre N est :

$$P_N = \sum_{k=-N}^{+N} |\lambda_k|^2 = \lambda_0^2 + 2 \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2$$

Méthode.

1. **Calculer** $P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$ directement (plus rapide que la somme infinie si $x(t)$ est simple).
2. **Calculer** $P_N = \lambda_0^2 + 2 \sum_{k=1}^N |\lambda_k|^2$ avec les λ_k déjà obtenus.
3. **Comparer** le rapport P_N/P pour évaluer le pourcentage d'énergie capturé par les N premiers harmoniques.
4. **Largeur de bande** à $p\%$: trouver le plus petit N tel que $P_N/P \geq p/100$.

Remarque.

Pour un signal carré (créneau), les harmoniques pairs sont nuls. On calcule donc P_N en ne sommant que sur les harmoniques impairs $k = 1, 3, 5, \dots$. La convergence est lente ($|\lambda_k| \sim 1/k$) : il faut beaucoup d'harmoniques pour capturer 99% de la puissance. En revanche, pour un signal triangulaire ($|\lambda_k| \sim 1/k^2$), la convergence est rapide.

Exemple. Application n°1 — tiré du DE 2025/2026

Soit $f(t)$ le signal T -périodique de l'exemple 2.1 (dents de scie d'amplitude 1, $\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2j\pi k}$ pour $k \neq 0$, $\lambda_0 = 0$, $P_F = 1/12$).

1. Calculer la puissance partielle P_4 véhiculée par les harmoniques jusqu'à l'ordre 4.
2. Comparer P_4 et P_F (indication : $\frac{10}{9\pi^2} \approx 0,11$).

Solution.

1. **Puissance partielle P_4 :**

$$|\lambda_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2 k^2}$$

$$P_4 = 2 \sum_{k=1}^4 |\lambda_k|^2 = 2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{144 + 36 + 16 + 9}{144} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{205}{144}$$

$$P_4 = \frac{205}{288\pi^2} \approx 0,072$$

2. **Comparaison :**

$$\frac{P_4}{P_F} = \frac{205}{288\pi^2} \cdot 12 = \frac{205}{24\pi^2} \approx \frac{205}{236,9} \approx 86,5\%$$

Les 4 premiers harmoniques ne capturent qu'environ 86% de la puissance totale. La convergence lente est caractéristique des signaux en dents de scie (discontinuités entraînant $|\lambda_k| \sim 1/k$).

Produit de convolution

Acquis d'Apprentissage.

- Calculer un produit de convolution par la méthode graphique (retournement / glissement).
- Déterminer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire à partir de ses entrées-sorties.
- Calculer la réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque.

Récap.

Le **produit de convolution** de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est défini par :

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

Pour un **système linéaire invariant dans le temps** de réponse impulsionnelle $r(t)$, la sortie $s(t)$ pour une entrée $e(t)$ quelconque est :

$$s(t) = r(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) r(t - \tau) d\tau$$

Propriété. Propriétés du produit de convolution

- **Commutativité** : $x * y = y * x$.
- **Associativité** : $(x * y) * f = x * (y * f)$.
- **Linéarité** : $(x + ky) * f = x * f + k(y * f)$.
- **Élément neutre** : $x(t) * \delta(t) = x(t)$.
- **Retard** : $x(t) * \delta(t - \theta) = x(t - \theta)$.
- **Dérivation** : $\frac{d}{dt} [x * y] = \frac{dx}{dt} * y = x * \frac{dy}{dt}$.

3.1 Calculer un produit de convolution par la méthode graphique

Méthode. Retournement / glissement

Pour calculer $z(t) = x(t) * y(t)$:

1. **Choisir** le signal le plus simple à retourner (en général y).
2. **Retourner** : tracer $y(-\tau)$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).
3. **Décaler** : $y(t - \tau)$ est le signal $y(-\tau)$ translaté de $+t$ vers la droite.
4. **Identifier les plages de t** où la forme du chevauchement change (les bornes d'intégration changent à chaque fois qu'un bord du support de $y(t - \tau)$ franchit un bord du support de x).
5. **Calculer l'intégrale** $\int x(\tau) y(t - \tau) d\tau$ sur chaque plage, en ajustant les bornes.
6. **Vérifier** : $z(t) = 0$ hors du support (somme des durées des supports de x et $y =$ durée totale du support de z).

Remarque. Durée du support

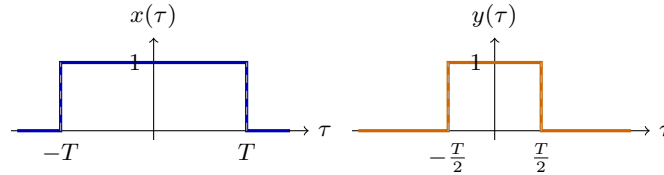
Si $x(t)$ est non nul sur une durée T_x et $y(t)$ sur une durée T_y , alors $z(t) = x * y$ est non nul sur une durée $T_x + T_y$. Pour des signaux causaux (nuls pour $t < 0$), $z(t)$ est aussi causal. Le nombre de **plages** à traiter est en général égal au nombre de bords des supports additionnés -1 (typiquement 3 plages pour deux portes).

Exemple. Application n°1 — convolution de deux portes, tiré du TD Chap. 3

Soient $x(t) = \Pi_{2T}(t)$ (porte de largeur $2T$ centrée en 0) et $y(t) = \Pi_T(t)$ (porte de largeur T centrée en 0). Calculer $f(t) = x(t) * y(t)$.

Solution.

On représente $x(\tau)$ et $y(t - \tau)$ pour identifier les plages de t où le chevauchement change de forme.



On identifie 4 bords : $-T, -T/2, T/2, T$ pour x ; les bords de $y(t - \cdot)$ se déplacent avec t . Les **plages de t** où le chevauchement change de forme sont :

- $t < -3T/2$: aucun chevauchement $\Rightarrow f(t) = 0$.
- $t \in [-\frac{3T}{2}, -\frac{T}{2}]$: intersection = $[t - T/2, -T] \cap [-T, T]$...
Le bord gauche de $y(t - \cdot)$ entre dans le support de x par la gauche. Intersection : $\tau \in [-T, t + T/2]$, longueur $t + \frac{3T}{2}$.

$$f(t) = \int_{-T}^{t+T/2} 1 \cdot 1 d\tau = t + \frac{3T}{2}$$

- $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$: $y(t - \cdot)$ est entièrement contenu dans $[-T, T]$. Intersection : $\tau \in [t - T/2, t + T/2]$, longueur T .

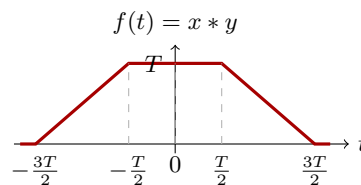
$$f(t) = T$$

- $t \in [\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}]$: le bord droit de $y(t - \cdot)$ sort du support de x par la droite. Intersection : $\tau \in [t - T/2, T]$, longueur $\frac{3T}{2} - t$.

$$f(t) = \frac{3T}{2} - t$$

- $t > 3T/2$: aucun chevauchement $\Rightarrow f(t) = 0$.

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{3T}{2} & t \in \left[-\frac{3T}{2}, -\frac{T}{2}\right] \\ T & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ \frac{3T}{2} - t & t \in \left[\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



C'est un signal **trapézoïdal** : montée linéaire, plateau de hauteur T , descente symétrique. Le support a bien une durée $2T + T = 3T$. ✓

Exemple. Application n°2 — convolution d'une porte et d'une exponentielle causale, tiré du TD Chap. 3

Soient $x(t) = \Pi_{2T}(t)$ et $z(t) = h(t) e^{-t/\theta}$ (exponentielle causale). Calculer $g(t) = x(t) * z(t)$.

Solution.

$x(\tau) \neq 0 \Leftrightarrow \tau \in [-T, T]$; $z(t - \tau) = e^{-(t-\tau)/\theta} h(t - \tau) \neq 0 \Leftrightarrow \tau \leq t$.

Les bords à surveiller sont $\tau = -T$ et $\tau = T$ (bords de x) et $\tau = t$ (bord de z).

- $t < -T$: $\tau \leq t < -T$, donc $x(\tau) = 0$ sur tout le chevauchement. $g(t) = 0$.
- $t \in [-T, T]$: chevauchement sur $\tau \in [-T, t]$ (bord droit = t , bord gauche = $-T$).

$$g(t) = \int_{-T}^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)/\theta} d\tau = e^{-t/\theta} \int_{-T}^t e^{\tau/\theta} d\tau = e^{-t/\theta} \theta \left[e^{t/\theta} - e^{-T/\theta} \right] = \theta \left(1 - e^{-(t+T)/\theta} \right)$$

- $t > T$: chevauchement sur $\tau \in [-T, T]$ entier.

$$g(t) = \int_{-T}^T e^{-(t-\tau)/\theta} d\tau = e^{-t/\theta} \theta \left[e^{T/\theta} - e^{-T/\theta} \right] = 2\theta \sinh\left(\frac{T}{\theta}\right) e^{-t/\theta}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \theta(1 - e^{-(t+T)/\theta}) & t \in [-T, T] \\ 2\theta \sinh\left(\frac{T}{\theta}\right) e^{-t/\theta} & t > T \end{cases}$$

Vérification : en $t = T$, les deux expressions donnent $\theta(1 - e^{-2T/\theta})$ et $2\theta \sinh(T/\theta)e^{-T/\theta} = \theta(e^{T/\theta} - e^{-T/\theta})e^{-T/\theta} = \theta(1 - e^{-2T/\theta})$. ✓

3.2 Déterminer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire

Définition. Réponse impulsionnelle

La **réponse impulsionnelle** $r(t)$ d'un système linéaire invariant dans le temps est la sortie du système lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Elle caractérise **complètement** le système : connaître $r(t)$ suffit à calculer la sortie pour *n'importe quelle* entrée via la convolution $s(t) = r(t) * e(t)$.

Méthode.

À partir d'une entrée $e(t)$ connue et de la sortie $s(t)$ observée :

1. **Si** $e(t) = h(t)$ (échelon unité) : $s(t)$ est la **réponse indicielle**. On obtient $r(t)$ en **dérivant** la réponse indicielle :

$$r(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

car $h(t) * r(t) = s(t)$ implique $\delta(t) * r(t) = \frac{ds}{dt}$.

2. **Si** $e(t)$ est quelconque : passer dans le domaine de Laplace (cf. Chap. 5) : $R(p) = S(p)/E(p)$, puis inverser.
3. **Vérifier la causalité** : $r(t) = 0$ pour $t < 0$ si le système est causal.

Remarque.

Pour un circuit RC série avec sortie sur le condensateur, l'équation différentielle est $v_E(t) = \tau \frac{dv_S}{dt} + v_S(t)$ où $\tau = RC$. La réponse indicielle est $s(t) = (1 - e^{-t/\tau})h(t)$, donc :

$$r(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} h(t)$$

C'est une exponentielle décroissante causale, cohérente avec le résultat du Chap. 5.

Exemple. Application n°1 — tiré du TD Chap. 3

Un système linéaire a pour entrée $e(t) = h(t)$ (échelon unité) et pour sortie observée :

$$s(t) = (1 - e^{-t/\tau}) h(t), \quad \tau > 0.$$

Déterminer la réponse impulsionnelle $r(t)$ de ce système.

Solution.

La réponse indicielle est $s(t) = (1 - e^{-t/\tau})h(t)$. On obtient $r(t)$ en dérivant :

$$r(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} [(1 - e^{-t/\tau})h(t)]$$

En appliquant la règle de Leibniz ($[uv]' = u'v + uv'$) avec $u(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ et $v(t) = h(t)$:

$$r(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} h(t) + \underbrace{(1 - e^0)}_{=0} \delta(t)$$

$$r(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} h(t)$$

C'est bien une exponentielle causale décroissante de constante de temps τ .

Vérification : $r(t) * h(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-u/\tau} du = [-e^{-u/\tau}]_0^t = 1 - e^{-t/\tau} = s(t)$. ✓

3.3 Calculer la réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque

Méthode.

Connaissant la réponse impulsionnelle $r(t)$ du système :

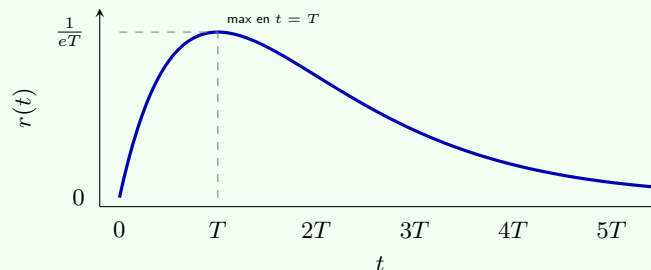
1. **Écrire** $y(t) = r(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) r(t - \tau) d\tau$.
2. **Restreindre** le domaine d'intégration au **support commun** de $e(\tau)$ et $r(t - \tau)$. Pour un système causal : $r(t - \tau) = 0$ si $\tau > t$, donc la borne supérieure est $\tau = t$.
3. **Identifier les plages de t** (même démarche que la méthode graphique de la section 3.1).
4. **Calculer l'intégrale** sur chaque plage. Résultats utiles :

$$\int_0^x u e^{-u} du = 1 - (1 + x)e^{-x}$$

Exemple. Application n°1 — tiré du DE 2025/2026

Soit un système linéaire dont la réponse impulsionnelle est :

$$r(t) = h(t) \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-t/T}$$



Calculer la réponse $y(t)$ à l'entrée échelon $e(t) = A h(t)$.

Solution.

$$y(t) = r(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A h(\tau) \cdot r(t - \tau) d\tau$$

Comme $e(\tau) = A h(\tau)$ est nul pour $\tau < 0$ et $r(t - \tau) = h(t - \tau) \cdot \frac{t - \tau}{T} \cdot e^{-(t - \tau)/T}$ est nul pour $\tau > t$, on intègre sur $\tau \in [0, t]$ pour $t \geq 0$, et $y(t) = 0$ pour $t < 0$.

Pour $t \geq 0$:

$$y(t) = A \int_0^t \frac{t - \tau}{T} e^{-(t - \tau)/T} d\tau$$

Changement de variable $u = \frac{t - \tau}{T}$, $du = -\frac{d\tau}{T}$, bornes : $\tau = 0 \rightarrow u = t/T$, $\tau = t \rightarrow u = 0$:

$$y(t) = A \int_0^{t/T} u e^{-u} \cdot T du = AT \int_0^{t/T} u e^{-u} du$$

En appliquant l'indication fournie avec $x = t/T$:

$$y(t) = AT \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-t/T} \right]$$

$$y(t) = AT \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-t/T} \right] h(t)$$

Vérifications :

- En $t = 0$: $y(0) = AT[1 - 1 \cdot 1] = 0$. ✓ (causalité)
- En $t \rightarrow +\infty$: $y(\infty) = AT \cdot 1 = AT$. ✓
- Le signal monte de 0 vers AT de façon régulière (réponse indicielle d'un système du second ordre sous-amorti).

Transformation de Fourier

Acquis d'Apprentissage.

- Calculer la transformée de Fourier d'un signal usuel par application directe de la définition ou des transformées connues.
- Calculer la transformée de Fourier d'un signal T -périodique à partir de son DSF.
- Appliquer les propriétés de la TF (retard, dérivation, changement d'échelle, modulation, convolution).
- Calculer la densité spectrale d'énergie ou de puissance et appliquer l'identité de Parseval–Plancherel.
- Appliquer le théorème de Shannon à l'échantillonnage.

Récap.

La **transformation de Fourier** associe à tout signal $x(t)$ d'énergie finie un spectre $X(f)$:

$$X(f) = \mathcal{TF}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt \quad x(t) = \mathcal{TF}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+2j\pi ft} df$$

$|X(f)|$ est le **spectre d'amplitude**, $\text{Arg}(X(f))$ le **spectre de phase**.

Transformées usuelles à connaître :

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - \tau)$	$e^{-2j\pi f\tau}$
1	$\delta(f)$
$e^{2j\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\Pi_\tau(t)$	$\tau \text{sinc}(\pi\tau f) = \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi f}$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$h(t) e^{-at} \ (a > 0)$	$\frac{1}{a + 2j\pi f}$

4.1 Calculer la transformée de Fourier d'un signal usuel

Méthode.

1. **Reconnaître** si le signal appartient à la table des transformées usuelles (ci-dessus). Si oui, appliquer directement.
2. Sinon, **calculer par définition** : $X(f) = \int_{\text{support}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$, en réduisant l'intégrale au support de $x(t)$.
3. **Factoriser** soigneusement pour faire apparaître un sinc ou une exponentielle complexe.
4. **Vérifier les symétries** : pour $x(t)$ réel, $|X(-f)| = |X(f)|$ (spectre d'amplitude pair) et $\text{Arg}(X(-f)) = -\text{Arg}(X(f))$ (spectre de phase impair).
5. Vérifier : $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$ (aire sous le signal).

Propriété. Symétries spectrales pour les signaux réels

Pour $x(t) \in \mathbb{R}$:

$$X(-f) = X^*(f) \implies |X(-f)| = |X(f)| \text{ (pair)}, \quad \text{Arg}(X(-f)) = -\text{Arg}(X(f)) \text{ (impair)}$$

De plus :

- $x(t)$ **pair** $\implies X(f) \in \mathbb{R}$ (spectre réel, pair).
- $x(t)$ **impair** $\implies X(f)$ imaginaire pur, impair.

Exemple. Application n°1 — tiré du TD Chap. 4

Calculer la transformée de Fourier de :

1. $h(t)e^{-at}$ ($a > 0$) par la définition.
2. $\Pi_\tau(t)$ (porte de largeur τ centrée en 0).

Solution.

1. Exponentielle causale :

$$X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-2j\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2j\pi f)t} dt = \left[\frac{e^{-(a+2j\pi f)t}}{-(a+2j\pi f)} \right]_0^{+\infty}$$

Le terme en $+\infty$ est nul car $a > 0$:

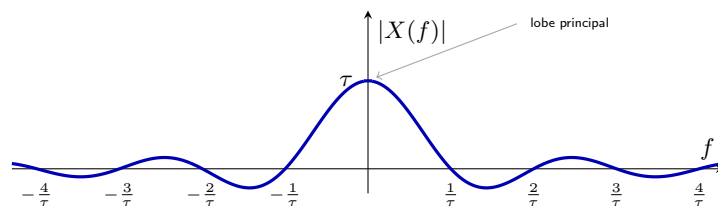
$$X(f) = \frac{1}{a + 2j\pi f}$$

Spectre d'amplitude : $|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$ (lorentzienne).

2. Porte de largeur τ :

$$X(f) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} 1 \cdot e^{-2j\pi ft} dt = \left[\frac{e^{-2j\pi ft}}{-2j\pi f} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{e^{-j\pi f\tau} - e^{+j\pi f\tau}}{-2j\pi f} = \frac{2 \sin(\pi f\tau)}{2\pi f}$$

$$X(f) = \tau \text{sinc}(\pi\tau f) = \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi f}$$



Le spectre est **réel** (porte paire \checkmark) et ses zéros sont en $f = k/\tau$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Vérification : $X(0) = \tau$ (aire de la porte). \checkmark

4.2 Appliquer les propriétés de la transformée de Fourier

Propriété. Propriétés fondamentales

Soient $x(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} X(f)$ et $y(t) \xrightarrow{\mathcal{TF}} Y(f)$.

Propriété	Signal	Spectre
Linéarité	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(f) + \beta Y(f)$
Retard	$x(t - \tau)$	$e^{-2j\pi f\tau} X(f)$
Modulation	$x(t) e^{2j\pi\nu t}$	$X(f - \nu)$
Changement d'échelle	$x(\lambda t)$	$\frac{1}{ \lambda } X\left(\frac{f}{\lambda}\right)$
Dérivation	$\frac{dx}{dt}$	$2j\pi f \cdot X(f)$
Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$
Produit	$x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Dualité	$X(t)$	$x(-f)$

Méthode.

Pour calculer la TF d'un signal construit à partir de signaux connus :

1. **Décomposer** $x(t)$ en opérations élémentaires (retard, changement d'échelle, modulation, dérivation, produit, convolution).
2. **Appliquer** la propriété correspondante à chaque opération, dans l'ordre inverse des opérations.
3. **Simplifier** le résultat (factorisation, mise sous forme $|\cdot| e^{j\cdot}$).
4. **Vérifier** la parité du spectre d'amplitude si $x(t)$ est réel.

Remarque. Retard et spectre d'amplitude

La propriété de retard $x(t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{TF}} e^{-2j\pi f\tau} X(f)$ montre que **retarder** un signal ne modifie pas son spectre d'amplitude $|X(f)|$ mais décale linéairement son spectre de phase de $-2\pi f\tau$. Cela permet de choisir librement l'origine des temps pour simplifier un calcul, puis de corriger la phase a posteriori.

Exemple. Application n°1 — tiré du TD Chap. 4

Soit $x_P(t)$ l'observation d'un signal sinusoïdal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ à travers une fenêtre rectangulaire de durée τ :

$$x_P(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \Pi_\tau(t)$$

Déterminer $X_P(f) = \mathcal{TF}\{x_P(t)\}$.

Solution.

Il s'agit d'un **produit** : on applique la propriété $\mathcal{TF}\{x \cdot y\} = X * Y$.

On sait :

$$\mathcal{TF}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\mathcal{TF}\{\Pi_\tau(t)\} = \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau f)$$

Donc :

$$X_P(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] * \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau f)$$

La convolution avec une impulsion de Dirac est un simple décalage :

$$X_P(f) = \frac{\tau}{2} [\operatorname{sinc}(\pi\tau(f - f_0)) + \operatorname{sinc}(\pi\tau(f + f_0))]$$

Commentaire : Le spectre de $x_P(t)$ est la somme de deux sinc centrés en $\pm f_0$. Plus la fenêtre τ est longue, plus les lobes sont étroits et plus l'observation est fidèle. Pour $\tau \rightarrow +\infty$, le sinc tend vers un Dirac et on retrouve le spectre discret de $x(t)$.

4.3 Calculer la transformée de Fourier d'un signal T -périodique

Méthode.

Un signal T -périodique n'est pas à énergie finie, mais on peut calculer sa TF à partir de son DSF :

1. Calculer le DSF de $x(t)$: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k e^{jk\omega t}$ avec $\omega = 2\pi/T = 2\pi f_0$.
2. Appliquer $\mathcal{TF}\{e^{2j\pi k f_0 t}\} = \delta(f - kf_0)$ à chaque terme.
3. Conclure :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \delta(f - kf_0)$$

Le spectre est un **peigne de Dirac pondéré** par les λ_k .

4. **Densité spectrale de puissance** : $S_x(f) = |X(f)|^2 = \sum_k |\lambda_k|^2 \delta(f - kf_0)$ (au sens des distributions).
5. **Puissance par Parseval** : $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \sum_k |\lambda_k|^2$.

Remarque.

Le spectre d'un signal périodique est **discret** (raies); celui d'un signal apériodique à énergie finie est **continu**. La transformée de Fourier unifie les deux cas : les raies sont des Dirac, les spectres continus sont des fonctions ordinaires.

Exemple. Application n°1 — tiré du DE 2025/2026

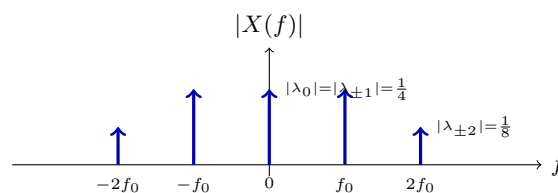
Un signal $x(t)$ périodique est représenté par son chronogramme et son spectre d'amplitude ci-contre. Le spectre montre des raies en $f = 0, f = f_0, f = 2f_0$ d'amplitudes respectives $|\lambda_0| = 1/4, |\lambda_{\pm 1}| = 1/4, |\lambda_{\pm 2}| = 1/8$.

1. Rappeler l'expression générale de $X(f)$ pour un signal T -périodique.
2. Exprimer la densité spectrale de puissance $S_x(f)$.
3. Calculer numériquement la puissance P_x .
4. Quelle condition sur la fréquence d'échantillonnage F_S garantit la restitution fidèle du signal ?

Solution.

1. Expression de $X(f)$:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \delta(f - kf_0)$$



2. Densité spectrale de puissance :

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

3. Calcul de P_x par Parseval :

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^2 = |\lambda_0|^2 + 2|\lambda_1|^2 + 2|\lambda_2|^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{64} = \frac{4}{64} + \frac{8}{64} + \frac{2}{64}$$

$$P_x = \frac{14}{64} = \frac{7}{32} \approx 0,219$$

Vérification possible par intégrale directe sur une période si le modèle de $x(t)$ est connu.

4. Condition de Shannon (voir section 4.5) : Le signal $x(t)$ contient des composantes jusqu'à la fréquence maximale $F_{\max} = 2f_0$. Pour une restitution fidèle :

$$F_S > 2 F_{\max} = 4f_0$$

4.4 Calculer la densité spectrale d'énergie et appliquer Parseval

Définition. Densité spectrale d'énergie et de puissance

- Signal à **énergie finie** : densité spectrale d'énergie $S_x(f) = |X(f)|^2$.

Identité de Parseval–Plancherel :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

- Signal **T-périodique** : densité spectrale de puissance $S_x(f) = \sum_k |\lambda_k|^2 \delta(f - kf_0)$, et $P_x = \int S_x(f) df = \sum_k |\lambda_k|^2$ (Parseval du DSF).

Méthode.

Pour calculer l'énergie d'un signal ou la bande de fréquence contenant un pourcentage donné de l'énergie :

1. **Calculer** $X(f)$ (ou utiliser la table).
2. **Former** $S_x(f) = |X(f)|^2$ et simplifier.
3. **Intégrer** $\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$ pour obtenir E_x . Si l'intégrale est difficile en fréquence, calculer E_x directement en temps : $\int x^2(t) dt$ (les deux méthodes donnent le même résultat par Parseval).
4. **Bande à p%** : résoudre $\int_{-B}^B S_x(f) df = \frac{p}{100} E_x$ pour trouver la demi-largeur de bande B . Utiliser $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x)$ pour les filtres du 1^{er} ordre.

Exemple. Application n°1 — densité spectrale d'une porte, tiré du TD Chap. 4

Soit $\Pi_\tau(t)$ une porte de largeur τ .

1. Exprimer $\hat{\Pi}_\tau(f) = \mathcal{TF}\{\Pi_\tau(t)\}$ et en déduire $S_\Pi(f)$.
2. Calculer l'énergie de $\Pi_\tau(t)$ de deux manières différentes, sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$.

Solution.

1. Transformée et DSE : D'après la table (section 4.1) :

$$\hat{\Pi}_\tau(f) = \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau f) = \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi f}$$

$$S_\Pi(f) = |\hat{\Pi}_\tau(f)|^2 = \left(\frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi f}\right)^2$$

2. Calcul de l'énergie :

Méthode temporelle : $\Pi_\tau(t) = 1$ sur $[-\tau/2, \tau/2]$, nul ailleurs.

$$E = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1^2 dt = \tau$$

Méthode fréquentielle (vérification par Parseval) :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\Pi(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi f}\right)^2 df$$

Changement de variable $x = \pi\tau f$ ($df = dx/(\pi\tau)$) :

$$= \frac{\tau^2}{(\pi\tau)^2} \cdot \frac{1}{\pi\tau} \cdot \pi\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\tau^2}{\pi^2\tau} \cdot \pi = \tau$$

Les deux méthodes concordent. ✓

Exemple. Application n°2 — fréquence de coupure à 50 %, tiré du TD Chap. 4

Soit $x(t) = A h(t) e^{-\omega_0 t}$ la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre. Déterminer la bande de fréquence $[-B, B]$ contenant 50 % de l'énergie totale de $x(t)$.

Solution.

Énergie totale :

$$E_x = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\omega_0 t} dt = A^2 \cdot \frac{1}{2\omega_0} = \frac{A^2}{2\omega_0}$$

Transformée de Fourier :

$$X(f) = \frac{A}{\omega_0 + 2j\pi f} \quad \Rightarrow \quad S_x(f) = \frac{A^2}{\omega_0^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Énergie dans $[-B, B]$:

$$E_B = \int_{-B}^B \frac{A^2}{\omega_0^2 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{A^2}{\omega_0^2} \int_{-B}^B \frac{df}{1 + (2\pi f/\omega_0)^2}$$

Changement de variable $u = 2\pi f/\omega_0$:

$$= \frac{A^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-2\pi B/\omega_0}^{2\pi B/\omega_0} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{A^2}{2\pi\omega_0} \cdot 2 \arctan\left(\frac{2\pi B}{\omega_0}\right) = \frac{A^2}{\pi\omega_0} \arctan\left(\frac{2\pi B}{\omega_0}\right)$$

Condition à 50 % :

$$E_B = \frac{1}{2} E_x \quad \Rightarrow \quad \frac{A^2}{\pi\omega_0} \arctan\left(\frac{2\pi B}{\omega_0}\right) = \frac{A^2}{4\omega_0}$$

$$\arctan\left(\frac{2\pi B}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi B}{\omega_0} = 1$$

$$\boxed{B = \frac{\omega_0}{2\pi} = f_c}$$

La bande contenant 50 % de l'énergie est exactement $[-f_c, f_c]$, où $f_c = \omega_0/(2\pi)$ est la fréquence de coupure du filtre.

4.5 Appliquer le théorème de Shannon à l'échantillonnage

Propriété. Théorème de Shannon

Soit $x(t)$ un signal **en bande limitée** : $X(f) = 0$ pour $|f| \geq F_{\max}$. Lorsqu'on l'échantillonne à la fréquence $F_S = 1/T_E$, le spectre du signal échantillonné est la **répétition périodique** de $X(f)$ à la fréquence F_S :

$$X_{\text{éch}}(f) = F_S \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kF_S)$$

Condition de Shannon (absence d'aliasing) :

$$\boxed{F_S > 2 F_{\max}}$$

Si cette condition est vérifiée, les répétitions spectrales ne se chevauchent pas et le signal original peut être restitué parfaitement par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F_S/2$.

Méthode.

1. **Identifier** la fréquence maximale F_{\max} du signal (fréquence de la composante spectrale la plus haute). Pour un signal périodique dont le DSF est connu : F_{\max} est la fréquence du dernier harmonique non nul.
2. **Appliquer** la condition de Shannon : $F_S > 2F_{\max}$.
3. **Diagnostiquer le repliement spectral (aliasing)** si $F_S < 2F_{\max}$: les copies spectrales se chevauchent ; la fréquence apparente d'une composante à f_0 devient $f_{\text{alias}} = |f_0 - k F_S|$ pour l'entier k qui minimise cette expression.

Remarque.

 Fréquence de Nyquist

La fréquence $F_S/2$ est appelée **fréquence de Nyquist**. Toute fréquence $f_0 > F_S/2$ présente dans le signal se *replie* autour de $F_S/2$ et apparaît dans le spectre discret à la fréquence $f_{\text{alias}} = |f_0 \bmod F_S|$ ou $F_S - f_0$ selon le cas. En pratique, on applique un **filtre anti-repliement** (passe-bas de coupure $F_S/2$) avant l'échantillonnage pour éliminer les composantes au-delà de Nyquist.

Exemple. Application n°1 — tiré du DE 2025/2026

On reprend le signal $x(t)$ de la section 4.3 dont le spectre d'amplitude présente des raies aux fréquences 0, f_0 , $2f_0$ (et leurs symétriques). Quelle est la condition sur F_S qui garantit la restitution fidèle de $x(t)$ après échantillonnage ?

Solution.

Le signal $x(t)$ contient des composantes spectrales jusqu'à la fréquence maximale $F_{\max} = 2f_0$ (harmonique de rang 2).

Par le théorème de Shannon, la condition d'échantillonnage sans aliasing est :

$$F_S > 2F_{\max} = 2 \times 2f_0 = 4f_0$$

$$\boxed{F_S > 4f_0}$$

Interprétation : si l'on échantillonne à $F_S = 4f_0$ exactement (limite théorique), la raie à $2f_0$ se retrouve exactement à la fréquence de Nyquist $F_S/2 = 2f_0$: la restitution est à la limite ; en pratique on choisit F_S nettement supérieure à $4f_0$ (typiquement $F_S = 10f_0$ en instrumentation) pour laisser de la marge au filtre anti-repliement.

Exemple. Application n°2 — diagnostic de repliement spectral, tiré du TD Chap. 4

Un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 7192$ Hz est échantillonné à $F_S = 8000$ Hz. Vérifier la condition de Shannon et calculer la fréquence apparente (alias) observée.

Solution.

Vérification de Shannon : $2F_{\max} = 2 \times 7192 = 14384$ Hz $\gg F_S = 8000$ Hz. La condition n'est pas respectée : il y a aliasing.

Calcul de l'alias : La fréquence apparente d'une composante à f_0 après échantillonnage à F_S est $f_{\text{alias}} = |f_0 - k F_S|$ pour l'entier k le plus proche de f_0/F_S . Ici $f_0/F_S = 7192/8000 \approx 0,899$, donc $k = 1$:

$$f_{\text{alias}} = |7192 - 1 \times 8000| = \boxed{808 \text{ Hz}}$$

Le signal de 7192 Hz est perçu comme un signal de 808 Hz (nettement plus grave), ce qui est audible expérimentalement.

Transformation de Laplace

Acquis d'Apprentissage.

- Calculer la transformée de Laplace d'un signal causal usuel et appliquer les propriétés (linéarité, retard, atténuation, dérivation, intégration).
- Inverser une transformée de Laplace par décomposition en éléments simples.
- Analyser la réponse d'un système linéaire (réponse impulsionnelle, réponse indicielle, valeur initiale, valeur finale).
- Résoudre une équation différentielle à coefficients constants par la transformée de Laplace.

Récap.

La **transformée de Laplace monovalente** d'un signal causal $x(t)$ (défini pour $t \geq 0$) est :

$$X(p) = \mathcal{TL}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad p = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$$

C'est une généralisation de la TF : en posant $p = 2j\pi f$, on retrouve la transformée de Fourier (sous réserve de convergence).

Transformées usuelles à connaître :

$x(t)$	$X(p) = \mathcal{TL}\{x(t)\}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - \theta)$	$e^{-p\theta}$
$h(t)$	$\frac{1}{p}$
$h(t) e^{-at}$	$\frac{1}{p + a}$
$h(t) t$	$\frac{1}{p^2}$
$h(t) t e^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$
$h(t) \cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$h(t) \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$h(t) e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$h(t) e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$

5.1 Calculer la transformée de Laplace d'un signal causal et appliquer les propriétés

Propriété. Propriétés fondamentales de la TL

Soient $x(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} X(p)$ et $y(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} Y(p)$, tous deux causaux.

Propriété	Signal temporel	Transformée
Linéarité	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(p) + \beta Y(p)$
Retard	$x(t - \tau) h(t - \tau)$	$e^{-p\tau} X(p)$
Atténuation	$e^{-at} x(t)$	$X(p + a)$
Changement d'échelle	$x(at)$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{p}{a}\right)$
Dérivation	$x'(t)$	$pX(p) - x(0^-)$
Dérivation 2 ^e	$x''(t)$	$p^2 X(p) - px(0^-) - x'(0^-)$
Intégration	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(p)}{p}$
Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(p) \cdot Y(p)$
Dérivation de $X(p)$	$-t x(t)$	$\frac{dX}{dp}$
Valeur initiale	$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow +\infty} pX(p)$
Valeur finale	$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$

Méthode.

Pour calculer $X(p) = \mathcal{TL}\{x(t)\}$:

1. **Identifier** si $x(t)$ figure directement dans la table. Si oui, appliquer directement.
2. Sinon, **décomposer** $x(t)$ en opérations élémentaires (retard, atténuation, dérivation, produit par t) et appliquer la propriété correspondante.
3. Pour les **signaux périodiques causaux** constitués d'un motif $m(t)$ répété de période T :

$$X(p) = \frac{M(p)}{1 - e^{-pT}}$$

où $M(p) = \mathcal{TL}\{m(t)\}$ (TL du motif sur une seule période).

4. **Vérifier** par les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale si les limites sont connues.

Remarque. Propriété de dérivation de $X(p)$

La propriété $\mathcal{TL}\{-t x(t)\} = \frac{dX}{dp}$ est très utile pour calculer des transformées du type $t e^{-at}$, $t \cos(\omega t)$, etc., sans repasser par l'intégrale de définition.

Exemple : $\mathcal{TL}\{t e^{-at} h(t)\} = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p+a} \right) = \frac{1}{(p+a)^2}$.

Exemple. Application n°1 — tiré du DE 2025/2026

Soient $x(t)$, $z(t) = e^{-at} x(t)$ et $r(t) = at z(t)$ définis pour $t \geq 0$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Rappeler la définition de $X(p) = \mathcal{TL}[x(t)]$.
2. Exprimer $Z(p) = \mathcal{TL}[z(t)]$ en fonction de $X(p)$.
3. Calculer $\frac{dZ}{dp}$ et en déduire $R(p) = \mathcal{TL}[r(t)]$.

Puis appliquer à $x(t) = A h(t)$.

Solution.

1. Définition :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

2. Transformée de $z(t) = e^{-at}x(t)$ par la propriété d'atténuation :

$$Z(p) = X(p+a)$$

3. Transformée de $r(t) = at z(t) = -a(-t)z(t)$ par la propriété de dérivation de la transformée :

$$\mathcal{TL}\{-t z(t)\} = \frac{dZ}{dp} = \frac{d}{dp} X(p+a) = X'(p+a)$$

Donc $\mathcal{TL}\{t z(t)\} = -X'(p+a)$, et :

$$R(p) = \mathcal{TL}\{at z(t)\} = -a X'(p+a)$$

Application à $x(t) = A h(t)$:

$$X(p) = \frac{A}{p}, \quad Z(p) = \frac{A}{p+a}, \quad X'(p) = -\frac{A}{p^2} \Rightarrow X'(p+a) = -\frac{A}{(p+a)^2}$$

$$R(p) = -a \cdot \left(-\frac{A}{(p+a)^2} \right) = \frac{aA}{(p+a)^2}$$

5.2 Inverser une transformée de Laplace par décomposition en éléments simples

Méthode. Décomposition en éléments simples (DES)

Pour inverser $X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$:

1. **Vérifier le degré** : si $\deg N \geq \deg D$, effectuer la **division euclidienne** de $N(p)$ par $D(p)$ pour obtenir $X(p) = Q(p) + \frac{N'(p)}{D(p)}$ avec $\deg N' < \deg D$. ($Q(p)$ correspond à des dérivées de $\delta(t)$.)
2. **Factoriser $D(p)$** en facteurs :
 - **1^{er} espèce** : $(p+a)^n$ avec a réel (racine réelle de multiplicité n).
 - **2^e espèce** : $(p^2+ap+b)^n$ avec $a^2-4b < 0$ (paire de racines complexes conjuguées).
3. **Écrire la décomposition** :

$$\frac{N'(p)}{D(p)} = \sum_i \frac{A_i}{(p+a_i)^{n_i}} + \sum_j \frac{B_j p + C_j}{(p^2+a_j p + b_j)^{m_j}} + \dots$$

4. Identifier les coefficients par :

- **Pôle simple réel** $p = -a_i$: $A_i = \lim_{p \rightarrow -a_i} (p+a_i) X(p)$.
- **Pôle multiple** : dériver $(p+a)^n X(p)$ et évaluer en $p = -a$.
- **Pôle complexe / 2^e espèce** : réduire au même dénominateur et identifier par égalité des coefficients.

5. Inverser terme à terme à l'aide de la table.

Remarque. Mise sous forme canonique du 2^e ordre
Un facteur $p^2 + ap + b$ sans racine réelle ($a^2 < 4b$) s'écrit :

$$(p + \alpha)^2 + \omega^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a}{2}, \quad \omega = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

Les inversions utiles sont alors :

$$\frac{1}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{T}\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t) h(t)$$

$$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{T}\mathcal{L}^{-1}} e^{-\alpha t} \cos(\omega t) h(t)$$

Exemple. Application n°1 — tiré du TD Chap. 5

Déterminer les originaux de :

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}, \quad Y(p) = \frac{3p}{p^2 + 4p + 4}, \quad Z(p) = \frac{p + 1}{p^2 + 4}$$

Vérifier chaque résultat aux limites par les théorèmes VI/VF.

Solution.

Signal $x(t)$ — $X(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$: Deux pôles simples réels en $p = -1$ et $p = -2$.

$$X(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1)X(p) = \frac{1}{-1+2} = 1, \quad B = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2)X(p) = \frac{1}{-2+1} = -1$$

$$\boxed{x(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) h(t)}$$

Vérif. VI : $\lim_{p \rightarrow \infty} p X(p) = 0 = x(0^+)$. ✓ *Vérif. VF* : $\lim_{p \rightarrow 0} p X(p) = 0 = x(+\infty)$. ✓

Signal $y(t)$ — $Y(p) = \frac{3p}{(p+2)^2}$: Pôle double réel en $p = -2$.

$$Y(p) = \frac{A}{(p+2)^2} + \frac{B}{p+2}$$

Réduire : $3p = A + B(p+2)$. En $p = -2$: $A = -6$. Par identification du coeff. de p : $B = 3$.

$$Y(p) = \frac{-6}{(p+2)^2} + \frac{3}{p+2}$$

$$\boxed{y(t) = (-6t + 3) e^{-2t} h(t) = 3(1 - 2t) e^{-2t} h(t)}$$

Vérif. VI : $\lim_{p \rightarrow \infty} p Y(p) = 3 = y(0^+)$. ✓ *Vérif. VF* : $\lim_{p \rightarrow 0} p Y(p) = 0 = y(+\infty)$. ✓

Signal $z(t)$ — $Z(p) = \frac{p+1}{p^2+4}$: Paire de racines complexes conjuguées $p = \pm 2j$. On décompose sur les formes canoniques du 2^e ordre :

$$Z(p) = \frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2+4}$$

$$\boxed{z(t) = \left(\cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) h(t)}$$

Vérif. VI : $\lim_{p \rightarrow \infty} p Z(p) = 1 = z(0^+)$. ✓ *Vérif. VF* : $\lim_{p \rightarrow 0} p Z(p) = 0$ (pas de limite finie car z oscille). ✓

Exemple. Application n°2 — second ordre, tiré du TD Chap. 5

Déterminer l'original de $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ sans recourir à la table.

Solution.

On cherche $f(t)$ tel que $\mathcal{TL}\{f(t)\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Les racines de $D(p) = p^2 + \omega^2$ sont $p = \pm j\omega$ (imaginaires pures).

On écrit la DES sur \mathbb{R} :

$$F(p) = \frac{\omega}{(p - j\omega)(p + j\omega)} = \frac{A}{p - j\omega} + \frac{B}{p + j\omega}$$
$$A = \lim_{p \rightarrow j\omega} (p - j\omega)F(p) = \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{1}{2j}, \quad B = \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{-1}{2j}$$
$$f(t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega t} h(t) - \frac{1}{2j} e^{-j\omega t} h(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} h(t)$$

$$\boxed{f(t) = \sin(\omega t) h(t)}$$

Ce résultat figure dans la table et sert de référence pour toutes les inversions du 2^e ordre.

5.3 Analyser la réponse d'un système linéaire par la TL

Définition. Fonction de transfert

Pour un système linéaire invariant causal de réponse impulsionnelle $r(t)$:

$$R(p) = \mathcal{TL}\{r(t)\} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

est la **fonction de transfert** du système. La sortie $s(t)$ à une entrée $e(t)$ s'obtient par :

$$S(p) = R(p) \cdot E(p) \xrightarrow{\mathcal{TL}^{-1}} s(t) = r(t) * e(t)$$

Méthode.

Pour déterminer la réponse d'un système à une entrée donnée :

1. **Calculer** $E(p) = \mathcal{TL}\{e(t)\}$.
2. **Former** $S(p) = R(p) \cdot E(p)$.
3. **Inverser** $S(p)$ par DES pour obtenir $s(t)$.
4. **Vérifier** par les théorèmes :
 - Valeur initiale : $s(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p)$.
 - Valeur finale : $s(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p)$ (valable si $s(t)$ admet une limite finie).

Pour la **réponse indicielle** ($e(t) = h(t)$) : $E(p) = 1/p$, donc $S(p) = R(p)/p$.

Remarque. Lien TF – TL pour les systèmes stables

Pour un système **stable** (tous les pôles de $R(p)$ ont une partie réelle strictement négative), la réponse en fréquence s'obtient en substituant $p = 2j\pi f$ dans $R(p)$:

$$R(2j\pi f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (\text{filtre passe-bas 1^{er} ordre})$$

C'est la fonction de transfert en régime sinusoïdal permanent, liée à la TF de la réponse impulsionnelle.

Exemple. Application n°1 — réponse indicielle RC, tiré du TD Chap. 5

On considère un circuit RC série (résistance R , condensateur C) dont les entrées-sorties vérifient :

$$v_E(t) = \tau \frac{dv_S}{dt} + v_S(t), \quad \tau = RC$$

Le condensateur est initialement déchargé ($v_S(0^-) = 0$). Déterminer $R(p)$, la réponse impulsionnelle $r(t)$ et la réponse indicielle $v_S(t)$ à $v_E(t) = 5 h(t)$.

Solution.

Fonction de transfert : On applique la TL à l'équation différentielle (conditions initiales nulles) :

$$E(p) = \tau [p V_S(p) - \underbrace{v_S(0^-)}_{=0}] + V_S(p) = (1 + \tau p) V_S(p)$$

$$R(p) = \frac{V_S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \tau p} = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}$$

Réponse impulsionnelle :

$$r(t) = \mathcal{T}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/\tau}{p + 1/\tau} \right\} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} h(t)$$

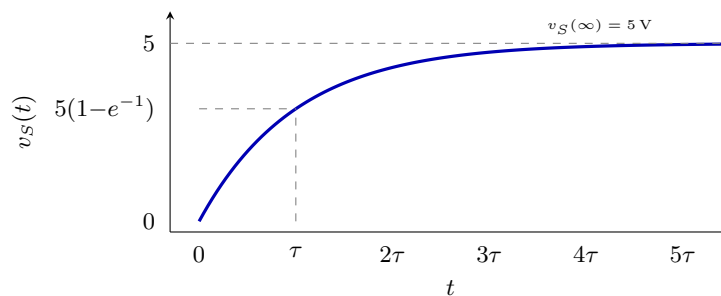
Réponse indicielle à $v_E(t) = 5 h(t)$:

$$V_S(p) = R(p) \cdot \frac{5}{p} = \frac{5}{p(1 + \tau p)} = \frac{5/\tau}{p(p + 1/\tau)}$$

DES : $\frac{5/\tau}{p(p+1/\tau)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1/\tau}$

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{5/\tau}{p(p + 1/\tau)} = \frac{5/\tau}{1/\tau} = 5, \quad B = \lim_{p \rightarrow -1/\tau} (p + 1/\tau) \cdot \frac{5/\tau}{p(p + 1/\tau)} = \frac{5/\tau}{-1/\tau} = -5$$

$$v_S(t) = 5 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) h(t)$$



Vérif. VI : $v_S(0^+) = 0$ (condensateur initialement déchargé). ✓

Vérif. VF : $v_S(+\infty) = 5V$ (condensateur chargé à la tension d'entrée). ✓

Exemple. Application n°2 — réponse indicielle du DE 2025/2026

On reprend le système de l'exemple 5.1 dont la fonction de transfert est $R(p) = \frac{aA}{(p+a)^2}$ (avec $x(t) = A h(t)$, donc a joue le rôle d'une constante de temps inverse). Calculer $y(t)$, la réponse à l'entrée échelon $e(t) = A h(t)$.

Solution.

Transformée de la sortie :

$$Y(p) = R(p) \cdot E(p) = \frac{aA}{(p+a)^2} \cdot \frac{A}{p} = \frac{aA^2}{p(p+a)^2}$$

DES :

$$\frac{aA^2}{p(p+a)^2} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{(p+a)^2} + \frac{C_3}{p+a}$$

$$C_1 = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{aA^2}{p(p+a)^2} = \frac{aA^2}{a^2} = \frac{A^2}{a}$$

$$C_2 = \lim_{p \rightarrow -a} (p+a)^2 \cdot \frac{aA^2}{p(p+a)^2} = \frac{aA^2}{-a} = -A^2$$

Pour C_3 : réduire au même dénominateur et identifier les coefficients de p^2 : $aA^2 = C_1(p+a)^2 + C_2p + C_3p(p+a)$

Coeff. de p^2 : $0 = C_1 + C_3 \Rightarrow C_3 = -C_1 = -\frac{A^2}{a}$

$$Y(p) = \frac{A^2/a}{p} - \frac{A^2}{(p+a)^2} - \frac{A^2/a}{p+a}$$

Inversion :

$$y(t) = A^2 \left[\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{a} + t \right) e^{-at} \right] \quad h(t) = \frac{A^2}{a} [1 - (1+at)e^{-at}] h(t)$$

Vérif. VI : $y(0^+) = 0$. ✓

Vérif. VF : $y(+\infty) = A^2/a$. ✓

Cohérence avec Chap. 3 : en posant $a = 1/T$ et $A \rightarrow A$, on retrouve le résultat $y(t) = AT[1 - (1 + t/T)e^{-t/T}] h(t)$ de l'exemple 3.3. ✓

5.4 Résoudre une équation différentielle à coefficients constants par la TL

Méthode.

1. **Appliquer la TL** à chaque membre de l'équation différentielle, en utilisant la propriété de dérivation :

$$\mathcal{TL}\{x'(t)\} = pX(p) - x(0^-)$$

$$\mathcal{TL}\{x''(t)\} = p^2X(p) - px(0^-) - x'(0^-)$$

2. **Substituer** les conditions initiales $x(0^-)$, $x'(0^-)$, etc.
3. **Isoler** $X(p)$ (ou $Y(p)$, etc.) algébriquement.
4. **Inverser** par DES pour obtenir $x(t)$.
5. **Vérifier** par les théorèmes VI/VF ou en réinjectant dans l'équation différentielle.

Remarque. Conditions initiales

La TL *monovalente* intègre naturellement les conditions initiales dans le calcul. Si les conditions initiales sont **toutes nulles** (système au repos), la propriété de dérivation se simplifie : $\mathcal{TL}\{x^{(n)}(t)\} = p^n X(p)$, et on retrouve directement la fonction de transfert $R(p) = S(p)/E(p)$.

Exemple. Application n°1 — tiré du TD Chap. 5

Soient $x(t)$ et $y(t) = x'(t)$ définis pour $t \geq 0$ vérifiant :

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, \quad y(0^-) = 0, \quad x(0^-) = 1$$

1. Exprimer $\mathcal{TL}\{x'(t)\}$ et $\mathcal{TL}\{y'(t)\}$ en fonction de $X(p)$, $Y(p)$ et des conditions initiales.
2. En déduire $X(p)$.
3. Déterminer $x(t)$ par inversion de $X(p)$.

Solution.

1. Transformées des dérivées :

$y(t) = x'(t)$, donc $Y(p) = pX(p) - x(0^-) = pX(p) - 1$.

$y'(t) = x''(t)$, donc :

$$\mathcal{TL}\{y'(t)\} = pY(p) - y(0^-) = pY(p) - 0 = pY(p)$$

2. Expression de $X(p)$:

On applique la TL à l'équation $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$:

$$p^2X(p) - px(0^-) - x'(0^-) + 3[pX(p) - x(0^-)] + 2X(p) = 0$$

Ici $x(0^-) = 1$ et $x'(0^-) = y(0^-) = 0$:

$$p^2X(p) - p + 3pX(p) - 3 + 2X(p) = 0$$

$$X(p)(p^2 + 3p + 2) = p + 3$$

$$X(p) = \frac{p + 3}{p^2 + 3p + 2} = \frac{p + 3}{(p + 1)(p + 2)}$$

3. Inversion par DES :

$$X(p) = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{p + 2}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -1} (p + 1) \frac{p + 3}{(p + 1)(p + 2)} = \frac{-1 + 3}{-1 + 2} = 2$$

$$B = \lim_{p \rightarrow -2} (p + 2) \frac{p + 3}{(p + 1)(p + 2)} = \frac{-2 + 3}{-2 + 1} = -1$$

$$x(t) = (2e^{-t} - e^{-2t}) h(t)$$

Vérif. VI : $x(0^+) = 2 - 1 = 1 = x(0^-)$. ✓

Vérif. VF : $x(+\infty) = 0$ (système stable, équation homogène). ✓