Fiche Méthodes

Propagation Électromagnétique

Module : SP401

Un recueil de méthodes pour accompagner vos révisions

Doryan Denis

Version du document	**v1.1**
Première édition	23 juin 2026
Dernière mise à jour	23 juin 2026

Table des matières

1 Outils mathématiques d'analyse vectorielle **2**
- 1.1 Identifier les opérateurs d'analyse vectorielle applicables à une grandeur . . . 2
- 1.2 Calculer le gradient d'un champ scalaire . . . 3
- 1.3 Calculer la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées non cartésiennes . . . 4
- 1.4 Calculer le rotationnel d'un champ vectoriel . . . 4
- 1.5 Calculer le laplacien d'un champ et sa dérivée temporelle seconde . . . 5

2 Équations de Maxwell et équation de propagation **7**
- 2.1 Établir l'équation de propagation du champ électromagnétique à partir des équations de Maxwell 7
- 2.2 Déterminer le champ électrique créé par une distribution de charge à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss . . . 8
- 2.3 Déterminer le champ magnétique créé par une distribution de courant à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère . . . 11

3 Induction électromagnétique **12**
- 3.1 Calculer la f.é.m. induite et le courant induit dans un circuit fixe . . . 12

4 Propagation des ondes planes dans le vide et dans l'air **14**
- 4.1 Identifier la direction de propagation et le vecteur d'onde à partir d'un champ donné . . . 14
- 4.2 Déterminer les grandeurs caractéristiques d'une OPPS et représenter le vecteur d'onde . . . 15
- 4.3 Déduire le champ magnétique (ou électrique) à l'aide des propriétés des ondes planes . . . 17
- 4.4 Déduire le champ magnétique (ou électrique) à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday (ou Ampère) 18
- 4.5 Vérifier qu'un champ est solution de l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion 19
- 4.6 Étudier la superposition de deux ondes planes progressives . . . 20

5 Énergie d'une onde électromagnétique **21**
- 5.1 Déterminer le vecteur de Poynting, sa valeur moyenne et la puissance moyenne rayonnée . . . 21
- 5.2 Vérifier l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique . . . 23

6 Compléments : milieu conducteur et réflexion **26**
- 6.1 Établir la relation de dispersion d'une onde dans un conducteur . . . 26
- 6.2 Étudier la réflexion d'une onde plane sur un conducteur parfait et la pression de radiation . . . 27

1 Outils mathématiques d'analyse vectorielle

Acquis d'Apprentissage.

- Savoir reconnaître si un opérateur (gradient, divergence, rotationnel, laplacien) peut s'appliquer à une grandeur donnée.
- Savoir calculer un gradient, une divergence, un rotationnel et un laplacien en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.
- Connaître les identités remarquables d'analyse vectorielle, réutilisées dans tous les chapitres suivants.

1.1 Identifier les opérateurs d'analyse vectorielle applicables à une grandeur

Méthode.
Avant tout calcul, il faut vérifier que l'opérateur a un sens pour la grandeur sur laquelle on l'applique :

- le **gradient** ($\overrightarrow{grad}$) ne s'applique qu'à une fonction **scalaire** (pression, température, potentiel...) et redonne un **vecteur** ;
- la **divergence** (div) et le **rotationnel** ($\overrightarrow{rot}$) ne s'appliquent qu'à un **vecteur** ; div redonne un **scalaire**, $\overrightarrow{rot}$ redonne un **vecteur** ;
- le **laplacien** (Δ) s'applique aussi bien à un scalaire (résultat scalaire) qu'à un vecteur, composante par composante (résultat vecteur).

Pour décider si une écriture comme $\overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{U})\right)$ a un sens, on examine les opérateurs de l'intérieur vers l'extérieur, en vérifiant à chaque étape la nature (scalaire ou vecteur) du résultat obtenu.

Exemple. Tester la cohérence d'opérateurs successifs
On considère le potentiel scalaire $V(x,y,z) = E_0\dfrac{x^2+y^2+z^2}{c}$, où E_0 et c sont des constantes.

1. Parmi les opérateurs laplacien, rotationnel, divergence et gradient, lesquels peuvent être appliqués à V ?
2. On pose $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$. Parmi ces mêmes opérateurs, lesquels peuvent être appliqués à $\overrightarrow{E}$?

Solution.
1. V est une fonction scalaire. Seuls les opérateurs qui acceptent un scalaire en argument ont un sens :

- $\overrightarrow{grad}(V)$: a un sens (résultat : un vecteur) ;
- ΔV : a un sens (résultat : un scalaire) ;
- $div(V)$ et $\overrightarrow{rot}(V)$: n'ont pas de sens, V n'étant pas un vecteur.

2. $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ est maintenant un vecteur. On a donc :

- $div(\overrightarrow{E})$: a un sens (résultat : un scalaire) ;
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E})$: a un sens (résultat : un vecteur) ;
- $\Delta\overrightarrow{E}$: a un sens (résultat : un vecteur, calculé composante par composante) ;
- $\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{E})$: n'a pas de sens, $\overrightarrow{E}$ n'étant pas un scalaire.

Remarque. Tester une chaîne d'opérateurs plus longue
Soit un vecteur force $\overrightarrow{F}$ quelconque. La même logique s'applique à des écritures plus longues :

- $\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{F})$: sans sens ($\overrightarrow{F}$ est un vecteur) $\Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{F})\right)$ est donc lui aussi sans sens ;
- $div(\overrightarrow{F})$: a un sens (scalaire) $\Rightarrow \overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{F})\right)$ a un sens (vecteur), alors que $div\left(div(\overrightarrow{F})\right)$ n'en a pas ($div(\overrightarrow{F})$ est déjà un scalaire) ;
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F})$: a un sens (vecteur) $\Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F})\right)$ a également un sens.

Pour $\overrightarrow{F} = (x^2 + 3y,\ z^3 - 2y,\ 4x)$, on trouve par exemple $div(\overrightarrow{F}) = 2x - 2$, $\overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{F})\right) = (2, 0, 0)$ et $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F})\right) = (0, -6z, 0)$ — un résultat que l'on peut retrouver directement avec l'identité $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U})) = \overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{U})) - \Delta\overrightarrow{U}$.

1.2 Calculer le gradient d'un champ scalaire

Méthode.
En coordonnées cartésiennes, le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

On calcule donc les trois dérivées partielles de f par rapport à chacune des variables, les autres étant considérées comme des constantes.

Exemple. Calculer $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ et ΔV
On reprend le potentiel scalaire $V(x, y, z) = E_0\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{c}$. Donner l'expression de $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ et de ΔV.

Solution.
On calcule les trois dérivées partielles de V :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2E_0}{c}x \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2E_0}{c}y \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{2E_0}{c}z$$

D'où :

$$\overrightarrow{grad}(V) = \frac{2E_0}{c}\left(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{E} = -\frac{2E_0}{c}\left(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}\right)}$$

On en déduit immédiatement le laplacien de V, en sommant les dérivées secondes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{2E_0}{c} + \frac{2E_0}{c} + \frac{2E_0}{c}$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{6E_0}{c}}$$

1.3 Calculer la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées non cartésiennes

Méthode.
Lorsqu'un champ vectoriel est donné dans un système de coordonnées cylindriques ou sphériques, on utilise l'expression de la divergence propre à ce système (toujours rappelée dans l'énoncé) plutôt que la formule cartésienne. Par exemple, en coordonnées cylindriques, pour $\overrightarrow{U} = U_r\overrightarrow{u_r} + U_\theta\overrightarrow{u_\theta} + U_z\overrightarrow{u_z}$:

$$div(\overrightarrow{U}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

On identifie d'abord les composantes non nulles du champ et leurs dépendances, puis on n'effectue que les dérivées des termes effectivement présents : les autres termes de la formule sont nuls.

Exemple. Divergence d'un champ radial créé par un cylindre chargé
On considère le champ électrique créé à l'extérieur d'un cylindre chargé uniformément dans son volume :

$$\overrightarrow{E_{ext}} = \frac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}$$

Calculer $div(\overrightarrow{E_{ext}})$ et $\overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{E_{ext}})\right)$.

Solution.
Le champ $\overrightarrow{E_{ext}}$ n'a qu'une composante radiale $E_r = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$, donc seul le premier terme de la divergence cylindrique est non nul :

$$div(\overrightarrow{E_{ext}}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\right) = 0$$

puisque $rE_r = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$ ne dépend pas de r.

$$\boxed{div(\overrightarrow{E_{ext}}) = 0}$$

La divergence étant une constante (nulle), son gradient est immédiatement nul :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{E_{ext}})\right) = \overrightarrow{0}}$$

Remarque.
Ce résultat n'est pas un hasard : à l'extérieur du cylindre, il n'y a pas de charge ($\rho_{ext} = 0$). On retrouvera ce lien direct entre $div(\overrightarrow{E})$ et une densité de charge avec l'équation de Maxwell-Gauss (Chapitre 2).

1.4 Calculer le rotationnel d'un champ vectoriel

Méthode.
On utilise la formule du rotationnel adaptée au système de coordonnées de l'énoncé. En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Astuce : un champ purement radial qui ne dépend que de r (comme un champ électrostatique créé par une distribution à symétrie cylindrique ou sphérique) a toujours un rotationnel nul : c'est cohérent avec l'identité $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{0}$, un tel champ dérivant toujours d'un potentiel scalaire.

Exemple. Rotationnel d'un champ radial

Que vaut $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E_{ext}}\right)$ pour le champ $\overrightarrow{E_{ext}} = \dfrac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}$ de l'exemple précédent ?

Solution.

Le champ n'a qu'une composante radiale $E_r(r)$, sans dépendance en θ ni en z, et $U_\theta = U_z = 0$. Tous les termes de la formule du rotationnel cylindrique s'annulent donc :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E_{ext}}\right) = \overrightarrow{0}}$$

Ce résultat est cohérent avec le fait que $\overrightarrow{E_{ext}}$ est un champ électrostatique : il dérive d'un potentiel scalaire $V(r)$ tel que $\overrightarrow{E_{ext}} = -\overrightarrow{grad}(V)$, et l'on sait que $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(V)\right) = \overrightarrow{0}$.

1.5 Calculer le laplacien d'un champ et sa dérivée temporelle seconde

Méthode.

Pour un champ qui ne dépend que d'une seule variable d'espace (par exemple x) et du temps t, le laplacien se réduit à une simple dérivée seconde par rapport à cette variable :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

On calcule séparément Δf et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$: c'est cette comparaison qui permettra, dans les chapitres suivants, de vérifier qu'un champ est solution d'une équation de propagation et d'en tirer une relation entre le nombre d'onde et la pulsation.

Exemple. Laplacien et dérivée temporelle d'un champ sinusoïdal

On considère un champ électrique sinusoïdal $\overrightarrow{E}(x,t) = E_0\cos(kx-\omega t)\overrightarrow{e_z}$, où k, E_0 et ω sont des constantes.

1. Calculer $\Delta\overrightarrow{E}$ et $\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$.
2. Ce champ vérifie l'équation $\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$. En déduire une relation entre k et ω, puis donner la grandeur physique à laquelle correspond $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ et calculer sa valeur (on donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ S.I. et $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi.10^9}$ S.I.).

Solution.

1. Le champ ne dépend que de x et de t, donc :

$$\Delta\overrightarrow{E} = \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial x^2} = -k^2E_0\cos(kx-\omega t)\overrightarrow{e_z} = -k^2\overrightarrow{E}$$

$$\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2E_0\cos(kx-\omega t)\overrightarrow{e_z} = -\omega^2\overrightarrow{E}$$

2. En substituant dans l'équation donnée :

$$-k^2\overrightarrow{E} - \mu_0\varepsilon_0\left(-\omega^2\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{0} \quad\Leftrightarrow\quad \left(-k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2\right)\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$$

Comme $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{0}$, on en déduit la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \mu_0\varepsilon_0\,\omega^2}$$

L'équation $\Delta f - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ étant l'équation de propagation à une dimension, le terme $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ s'identifie

à une vitesse de propagation :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi.10^{-7} \times \frac{1}{36\pi.10^9}}} \approx 3.10^8 \text{ m/s}$$

On reconnaît la célérité de la lumière dans le vide c.

Récap.
Les identités remarquables d'analyse vectorielle suivantes seront réutilisées dans les chapitres qui suivent :

1. $div\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U})\right) = 0$
2. $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \overrightarrow{0}$
3. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\,\overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{grad}(g)$
4. $\Delta\overrightarrow{U} = \overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{U})\right) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U})\right)$
5. $\overrightarrow{grad}(fg) = f\,\overrightarrow{grad}(g) + g\,\overrightarrow{grad}(f)$
6. $\overrightarrow{rot}(f\overrightarrow{U}) = f\,\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U}) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge \overrightarrow{U}$
7. $div(f\overrightarrow{U}) = f\,div(\overrightarrow{U}) + \overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{U}$
8. $div(\overrightarrow{U_1} \wedge \overrightarrow{U_2}) = \overrightarrow{U_2}.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U_1}) - \overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U_2})$

L'identité (4) servira à établir l'équation de propagation du champ électromagnétique (Chapitre 2) ; l'identité (8) servira à établir le bilan d'énergie électromagnétique (Chapitre 5).

2
Équations de Maxwell et équation de propagation

Acquis d'Apprentissage.

- Connaître les quatre équations de Maxwell sous forme locale, en régime variable et en régime stationnaire.
- Savoir établir l'équation de propagation du champ électromagnétique à partir des équations de Maxwell.
- Savoir déterminer un champ $\overrightarrow{E}$ (ou $\overrightarrow{B}$) créé par une distribution de charge (ou de courant) à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss (ou Maxwell-Ampère).

Propriété. Les quatre équations de Maxwell — forme locale
Valables pour un milieu quelconque, en tout point et à tout instant :

Maxwell-Gauss :	$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$	(équation locale du théorème de Gauss)
Maxwell-Flux :	$div(\overrightarrow{B}) = 0$	(le champ magnétique est à flux conservatif)
Maxwell-Faraday :	$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$	(équation locale de la loi de Faraday)
Maxwell-Ampère :	$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu \overrightarrow{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$	(équation locale du théorème d'Ampère généralisé)

En régime stationnaire (grandeurs indépendantes du temps), les deux dernières équations deviennent :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu \overrightarrow{J}$$

2.1 Établir l'équation de propagation du champ électromagnétique à partir des équations de Maxwell

Méthode.
On combine les quatre équations de Maxwell pour obtenir une équation ne portant que sur $\overrightarrow{E}$ (ou uniquement sur $\overrightarrow{B}$), à l'aide de l'identité $\Delta \overrightarrow{U} = \overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{U})\right) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U})\right)$ (Chapitre 1) :

1. On part de l'équation de Maxwell-Faraday (pour obtenir l'équation sur $\overrightarrow{E}$) et on lui applique l'opérateur $\overrightarrow{rot}$.
2. On utilise l'identité ci-dessus pour transformer $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E})\right)$ en $\overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{E})\right) - \Delta \overrightarrow{E}$.
3. On remplace $div(\overrightarrow{E})$ (Maxwell-Gauss) et $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B})$ (Maxwell-Ampère) par leurs expressions.
4. On réarrange pour isoler $\Delta \overrightarrow{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$: l'équation obtenue est l'équation de propagation cherchée.

Exemple. Établir l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel quelconque
À l'aide des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu matériel quelconque :

$$\Delta \overrightarrow{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) + \mu \frac{\partial \overrightarrow{J}}{\partial t}$$

Que devient cette équation dans le vide (ou l'air) ? En déduire la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques.

Solution.
On part de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

On applique l'opérateur $\overrightarrow{rot}$ aux deux membres :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E})\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B})\right)$$

D'après Maxwell-Ampère, $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu \overrightarrow{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$, donc :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E})\right) = -\mu\frac{\partial \overrightarrow{J}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

On utilise l'identité $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E})\right) = \overrightarrow{grad}\left(div(\overrightarrow{E})\right) - \Delta\overrightarrow{E}$, ainsi que Maxwell-Gauss $div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}$:

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) - \Delta\overrightarrow{E} = -\mu\frac{\partial \overrightarrow{J}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$$

En réarrangeant :

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) + \mu\frac{\partial \overrightarrow{J}}{\partial t}}$$

Dans le vide (ou l'air) : $\rho = 0$, $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{0}$, $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$. Le second membre s'annule et l'on retrouve l'équation de D'Alembert :

$$\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

Par comparaison avec l'équation de propagation à une dimension $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ (Chapitre 1), on identifie :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3.10^8 \text{ m/s}}$$

Remarque : la même démarche, en partant de Maxwell-Ampère, donne l'équation de propagation de $\overrightarrow{B}$: $\Delta\overrightarrow{B} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = -\mu\,\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{J})$.

Remarque. Équation de conservation de la charge
La démonstration de la 4ème équation de Maxwell en régime variable s'appuie sur l'équation de conservation de la charge :

$$div(\overrightarrow{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

2.2 Déterminer le champ électrique créé par une distribution de charge à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss

Méthode.
Lorsqu'un champ $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de r et est purement radial (donnée résultant d'arguments de symétrie), on applique l'équation de Maxwell-Gauss $div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ avec la formule de la divergence adaptée à la géométrie (cylindrique ou sphérique) :

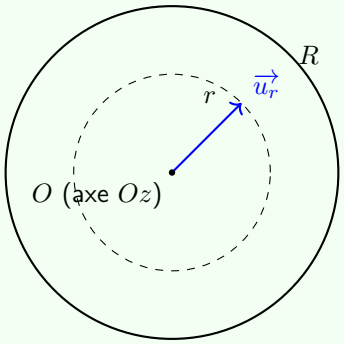
1. On écrit l'équation de Maxwell-Gauss séparément dans chaque zone où $\rho(r)$ a une expression différente.
2. Dans chaque zone, on intègre l'équation différentielle du premier ordre obtenue : une constante d'intégration apparaît.

3. On élimine les constantes non physiques par une condition de régularité (champ fini en $r = 0$) ou par la **continuité du champ électrique** à chaque interface entre deux zones.

Exemple. Application n°1 — Cylindre chargé en volume

On considère un câble cylindrique d'axe (Oz), de hauteur H et de rayon $R \ll H$, chargé avec une densité volumique $\rho = \rho_0 \dfrac{r^3}{R^3}$ (ρ_0 constante). Le champ électrique créé est selon $\overrightarrow{u_r}$ et ne dépend que de r. On donne :

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$



1. Donner l'expression de $\overrightarrow{E_{int}}$ $(r < R)$.
2. Donner l'expression de $\overrightarrow{E_{ext}}$ $(r > R)$, en fonction d'une constante d'intégration C.
3. Déterminer C par continuité en $r = R$.

Solution.

1. Intérieur du cylindre ($r < R$). Avec $E_\theta = E_z = 0$:

$$\frac{1}{r}\frac{d(rE_r)}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 r^3}{R^3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(rE_r)}{dr} = \frac{\rho_0 r^4}{R^3\varepsilon_0}$$

En intégrant par rapport à r :

$$rE_r = \frac{\rho_0 r^5}{5R^3\varepsilon_0} + C_1$$

Le champ doit rester fini sur l'axe $(r = 0)$, ce qui impose $C_1 = 0$:

$$\boxed{\overrightarrow{E_{int}}(r < R) = \frac{\rho_0 r^4}{5R^3\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}}$$

2. Extérieur du cylindre ($r > R$). Il n'y a plus de charge ($\rho = 0$) :

$$\frac{1}{r}\frac{d(rE_r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E_{ext}}(r > R) = \frac{C}{r}\overrightarrow{u_r}$$

3. Détermination de C. La continuité de E_r en $r = R$ donne :

$$\frac{\rho_0 R^4}{5R^3\varepsilon_0} = \frac{C}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}}$$

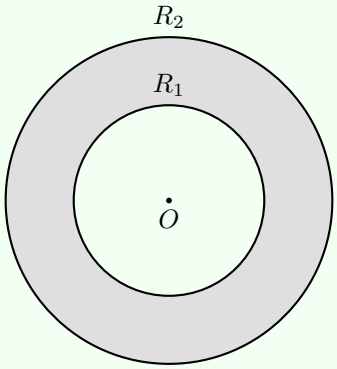
soit $\overrightarrow{E_{ext}}(r > R) = \dfrac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$.

Exemple. Application n°2 — Coquille sphérique chargée (trois zones)

On considère une sphère de centre O, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2. Le volume entre R_1 et R_2 est chargé avec $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{r}{R_2 - R_1}$, et il n'y a pas de charge ailleurs. Le champ électrique est selon $\overrightarrow{u_r}$ et

ne dépend que de r. On donne :

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$



1. Trouver le champ électrique pour $r < R_1$.
2. Montrer que, pour $R_1 < r < R_2$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0(r^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0 r^2(R_2 - R_1)}\overrightarrow{u_r}$.
3. Montrer que, pour $r > R_2$: $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0(R_2^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0 r^2(R_2 - R_1)}\overrightarrow{u_r}$.

Solution.

1. Pour $r < R_1$ (zone vide de charge) :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 E_r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 E_r = C_0$$

Le champ devant rester fini en $r = 0$, $C_0 = 0$:

$$\boxed{\overrightarrow{E}(r < R_1) = \overrightarrow{0}}$$

2. Pour $R_1 < r < R_2$, avec $\rho(r) = \rho_0\dfrac{r}{R_2 - R_1}$:

$$\frac{d(r^2 E_r)}{dr} = \frac{\rho_0 r^3}{\varepsilon_0(R_2 - R_1)} \quad \Rightarrow \quad r^2 E_r = \frac{\rho_0 r^4}{4\varepsilon_0(R_2 - R_1)} + C_1$$

La continuité en $r = R_1$ (où $E_r = 0$) donne $C_1 = -\dfrac{\rho_0 R_1^4}{4\varepsilon_0(R_2 - R_1)}$, d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{\rho_0(r^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0 r^2(R_2 - R_1)}\overrightarrow{u_r}}$$

3. Pour $r > R_2$ (zone vide de charge) :

$$r^2 E_r = C_2$$

La continuité en $r = R_2$ avec le résultat précédent donne $C_2 = \dfrac{\rho_0(R_2^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0(R_2 - R_1)}$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(r > R_2) = \frac{\rho_0(R_2^4 - R_1^4)}{4\varepsilon_0 r^2(R_2 - R_1)}\overrightarrow{u_r}}$$

2.3 Déterminer le champ magnétique créé par une distribution de courant à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère

Méthode.
La démarche est analogue à celle de Maxwell-Gauss, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu \overrightarrow{J}$ et la formule du rotationnel adaptée à la géométrie :

1. On écrit l'équation dans chaque zone, en ne gardant que la composante du rotationnel correspondant à la direction de $\overrightarrow{J}$.
2. On intègre l'équation différentielle obtenue ; une constante d'intégration apparaît.
3. On élimine cette constante par une condition de régularité (champ fini sur l'axe) ou par continuité à une interface.

On peut aussi utiliser cette équation « à l'envers » : connaissant $\overrightarrow{B}(r)$, on en déduit directement $\overrightarrow{J}(r)$ par simple dérivation, sans intégration ni constante.

Exemple. Application n°1 — Câble cylindrique parcouru par un courant volumique

On considère un câble cylindrique d'axe (Oz), de hauteur H et de rayon R, parcouru par $\overrightarrow{J} = J_0 \dfrac{r^2}{R^2} \overrightarrow{u_z}$ (J_0 constante). Le champ magnétique créé est selon $\overrightarrow{u_\theta}$ et ne dépend que de r. On donne :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

En régime stationnaire, trouver $\overrightarrow{B_{int}}$ $(r < R)$, en précisant la constante d'intégration.

Solution.
En régime stationnaire, $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu \overrightarrow{J}$. Avec $B_r = B_z = 0$ et $B_\theta(r)$ sans dépendance en θ ni z, seule la composante selon $\overrightarrow{u_z}$ du rotationnel subsiste :

$$\frac{1}{r}\frac{d(rB_\theta)}{dr} = \mu J_0 \frac{r^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(rB_\theta)}{dr} = \frac{\mu J_0 r^3}{R^2}$$

En intégrant :

$$rB_\theta = \frac{\mu J_0 r^4}{4R^2} + C$$

Le champ doit rester fini sur l'axe $(r = 0)$, ce qui impose $C = 0$:

$$\boxed{\overrightarrow{B_{int}}(r < R) = \frac{\mu J_0 r^3}{4R^2}\overrightarrow{u_\theta}}$$

Exemple. Application n°2 — Problème inverse : retrouver $\overrightarrow{J}(r)$ à partir de $\overrightarrow{B}(r)$

Un conducteur cylindrique de rayon R, de longueur infinie, est traversé par un courant de densité $\overrightarrow{J}(r)$, créant pour $r < R$:

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0}{4R^2} r^3 \overrightarrow{u_\theta}$$

En déduire $\overrightarrow{J}(r)$.

Solution.
On applique directement $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0 \overrightarrow{J}$; seule la composante selon $\overrightarrow{u_z}$ subsiste :

$$\mu_0 J(r) = \frac{1}{r}\frac{d(rB_\theta)}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu_0 J_0}{4R^2} r^4\right) = \frac{\mu_0 J_0}{R^2} r^2$$

$$\boxed{\overrightarrow{J}(r) = J_0 \frac{r^2}{R^2}\overrightarrow{u_z}}$$

On retrouve, par simple dérivation, la densité de courant de l'application n°1.

3 Induction électromagnétique

Acquis d'Apprentissage.

- Savoir calculer le flux d'un champ magnétique à travers un circuit, puis la force électromotrice induite (loi de Faraday).
- Savoir représenter le circuit électrique équivalent et en déduire le courant induit.
- Savoir vérifier la cohérence du signe du courant induit avec la loi de Lenz.

3.1 Calculer la f.é.m. induite et le courant induit dans un circuit fixe

Méthode.
Pour calculer le courant induit dans un circuit fixe placé dans un champ magnétique variable, on procède en trois étapes :

1. On calcule le flux du champ magnétique à travers la surface orientée délimitée par le circuit : $\phi(B) = \iint_S \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS}$ (si $\overrightarrow{B}$ est uniforme sur S, $\phi(B) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{S}$).
2. On applique la loi de Faraday $e = -\dfrac{d\phi(B)}{dt}$ pour obtenir la force électromotrice induite.
3. On modélise le circuit par son schéma électrique équivalent (générateur de f.é.m. $e(t)$ en série avec la résistance R du circuit) pour en déduire le courant induit $i(t) = \dfrac{e(t)}{R}$.

On vérifie enfin que le signe du courant obtenu est cohérent avec la **loi de Lenz** : le courant induit s'oppose toujours à la cause qui lui a donné naissance (ici, à la variation du flux).

Exemple. Spire carrée dans un champ magnétique variable
On considère une spire carrée de côté a, placée dans le plan (xOy). On note R la résistance de la spire. Le circuit est plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}(t) = \alpha t^2 \overrightarrow{u_z}$, où α est une constante.

1. Trouver l'expression du flux du champ magnétique à travers le circuit.
2. En déduire l'expression de la force électromotrice induite.
3. Représenter le circuit équivalent et en déduire l'intensité du courant induit circulant dans la spire.
4. Vérifier que le signe du courant induit est cohérent avec la loi de Lenz.

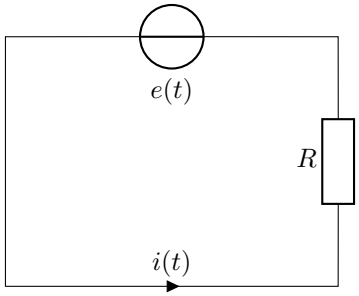
Solution.
1. Le champ $\overrightarrow{B}(t)$ est uniforme sur la spire, de surface $S = a^2$ et orientée selon $\overrightarrow{u_z}$:

$$\phi(B) = \overrightarrow{B}(t).\overrightarrow{S} = \alpha t^2\, a^2$$

2. D'après la loi de Faraday :

$$\boxed{e(t) = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -2\alpha a^2 t}$$

3. Le circuit équivalent est un générateur de f.é.m. $e(t)$ en série avec la résistance R de la spire :



D'où le courant induit $i(t) = \dfrac{e(t)}{R}$:

$$\boxed{i(t) = -\frac{2\alpha a^2}{R}\, t}$$

4. Pour $\alpha > 0$ et $t > 0$, le flux $\phi(B) = \alpha a^2 t^2$ augmente au cours du temps. D'après la loi de Lenz, le courant induit doit créer un champ magnétique qui s'oppose à cette augmentation, donc orienté selon $-\overrightarrow{u_z}$ à l'intérieur de la spire : le courant induit circule donc dans le sens horaire (vu depuis les $z > 0$). Le signe négatif de $i(t)$, obtenu avec la convention d'orientation choisie (sens trigonométrique direct autour de $\overrightarrow{u_z}$), traduit exactement ce sens horaire : le résultat est cohérent avec la loi de Lenz.

Remarque. Auto-induction et inductance

Lorsqu'une spire est parcourue par son propre courant variable $i(t)$, elle crée son propre flux, dit flux propre :

$$\phi(B) = L\, i(t)$$

où L est l'**inductance propre** de la spire (en Henry, H), qui ne dépend que de la géométrie du circuit. La f.é.m. d'auto-induction associée est :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt}$$

Cette grandeur n'a, à ce jour, jamais fait l'objet d'un exercice isolé dans les annales SP401 ; elle est mentionnée ici pour mémoire. Pour s'entraîner sur un cas plus complet (solénoïde + bobine, dynamo), voir TD2, exercice supplémentaire n°4.

4 Propagation des ondes planes dans le vide et dans l'air

Acquis d'Apprentissage.

- Savoir lire la direction de propagation et le vecteur d'onde sur l'expression d'un champ.
- Savoir déduire un champ ($\vec{E}$ ou $\vec{B}$) de l'autre, par les propriétés des ondes planes ou par les équations de Maxwell en notation complexe.
- Savoir vérifier qu'un champ est solution de l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion.
- Savoir étudier la superposition de deux ondes planes (interférences, onde stationnaire).

Propriété. Grandeurs caractéristiques d'une OPPS
Pour une onde plane progressive sinusoïdale (OPPS) de pulsation ω, se propageant à la vitesse c avec un vecteur d'onde $\vec{k}$ (tel que $\vec{k}.\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$) :

$$T = \frac{1}{f}\ \text{(s)} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\ \text{(rad/s)} \qquad \lambda = c.T = \frac{c}{f}\ \text{(m)} \qquad k = \|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}\ \text{(rad/m)} \qquad k.c = \omega$$

Le vecteur d'onde $\vec{k}$ a pour direction et sens ceux de l'axe de propagation.

Propriété. Notation complexe d'une OPPS
Pour un champ $\vec{U}(\vec{r},t) = \vec{U_0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, les opérateurs se traduisent par de simples produits :

$$\overrightarrow{grad} \ \to\ -i\vec{k} \qquad div \ \to\ -i\vec{k}. \qquad \overrightarrow{rot} \ \to\ -i\vec{k}\wedge \qquad \frac{\partial}{\partial t} \ \to\ i\omega$$

Les équations de Maxwell (et l'équation de propagation) deviennent ainsi de simples relations algébriques entre $\vec{E_0}$, $\vec{B_0}$, $\vec{k}$ et ω.

4.1 Identifier la direction de propagation et le vecteur d'onde à partir d'un champ donné

Méthode.
Le vecteur d'onde $\vec{k}$ se lit directement sur la phase du champ, toujours de la forme $\omega t - \vec{k}.\vec{r}$ (ou $\omega t + \vec{k}.\vec{r}$ selon la convention de signe choisie dans l'énoncé) :

1. on identifie les coefficients de x, y, z dans la phase : ce sont les composantes (k_x, k_y, k_z) de $\vec{k}$;
2. la direction de propagation est celle du vecteur unitaire $\dfrac{\vec{k}}{k}$;
3. l'onde est **transverse** si le champ donné est perpendiculaire à $\vec{k}$; elle est **plane** si le champ ne dépend de l'espace qu'à travers la combinaison $\vec{k}.\vec{r}$ (ses surfaces équiphases sont alors des plans).

Exemple. Composantes du vecteur d'onde et caractère transverse
Une OPPS se propage dans l'air, de champ magnétique :

$$\vec{B} = B_0 \cos\left(\omega t - \frac{k\sqrt{2}}{2}x - \frac{k\sqrt{2}}{2}y\right)\vec{u_z}$$

1. Donner les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$.

2. Justifier brièvement pourquoi cette onde est transverse.

Solution.
1. La phase $\omega t - \dfrac{k\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{k\sqrt{2}}{2}y$ est de la forme $\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}$. Par identification :

$$\boxed{k_x = \frac{k\sqrt{2}}{2} \; ; \quad k_y = \frac{k\sqrt{2}}{2} \; ; \quad k_z = 0}$$

(on vérifie $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \dfrac{k^2}{2} + \dfrac{k^2}{2} = k^2$, cohérent avec $\| \overrightarrow{k} \| = k$).
2. $\overrightarrow{B}$ est porté par $\overrightarrow{u_z}$, alors que $\overrightarrow{k}$ est entièrement contenu dans le plan (xOy) : $\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{k}$, l'onde est transverse.

Exemple. Application n°2 — Direction et nature d'une onde repérée par sa dépendance temporelle
Le champ électrique d'une onde se propageant dans le vide est $\overrightarrow{E_1}(x,t) = E_0 \sin\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)\right)\overrightarrow{u_y}$.

1. Donner la direction de propagation de l'onde.
2. Cette onde est-elle longitudinale ou transversale ?
3. Pourquoi peut-on affirmer que c'est une onde plane ?

Solution.
1. Le champ ne dépend de l'espace qu'à travers $t - \dfrac{x}{c}$: c'est la signature d'une onde se propageant vers les x croissants.
2. $\overrightarrow{E_1}$ est porté par $\overrightarrow{u_y}$, perpendiculaire à l'axe de propagation (Ox) : l'onde est transversale.
3. Le champ ne dépend que de x et t : les surfaces équiphases sont les plans $x = cste$: c'est bien une onde plane.

4.2 Déterminer les grandeurs caractéristiques d'une OPPS et représenter le vecteur d'onde

Méthode.
Connaissant les composantes (ou la norme) du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, on calcule, à l'aide des relations de la propriété en début de chapitre :

1. la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$;
2. la pulsation $\omega = k.c$ (c étant la vitesse dans le milieu de propagation) ;
3. l'angle entre l'axe de propagation et un axe donné, par $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{k}.\overrightarrow{u_{axe}}}{k}$;
4. l'expression complète du champ, une fois sa direction connue : $\overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})$.

Exemple. Vecteur d'onde, grandeurs caractéristiques et représentation
Une OPPS se propage dans le vide, de vecteur d'onde $k_x = \dfrac{k\sqrt{3}}{2}$, $k_y = \dfrac{k}{2}$, $k_z = 0$, et de champ électrique d'amplitude $E_0 = 2.10^5$ V/m.

1. Quelle est la vitesse de l'onde ?
2. Calculer λ sachant que $k = \pi.10^7$ rad/m.
3. Calculer la pulsation ω.
4. Représenter $\overrightarrow{k}$ dans le plan (xOy).
5. Préciser l'angle entre l'axe de propagation et (Ox).

6. Donner l'expression de $\overrightarrow{E}$, sachant qu'il est porté par $(Oz) > 0$.

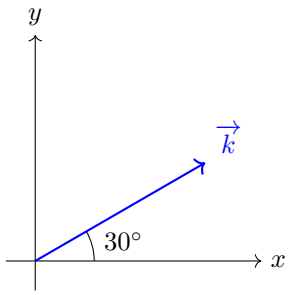
Solution.

1. L'onde se propage dans le vide : $\boxed{c \approx 3.10^8 \text{ m/s}}$.

2. $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{\pi.10^7} = \boxed{2.10^{-7} \text{ m}}$.

3. $\omega = k.c = \pi.10^7 \times 3.10^8 = \boxed{3\pi.10^{15} \text{ rad/s} \approx 9{,}42.10^{15} \text{ rad/s}}$.

4. $\overrightarrow{k} = \left(\dfrac{k\sqrt{3}}{2}, \dfrac{k}{2}, 0\right)$ est contenu dans le plan (xOy) :



5. $\cos\theta = \dfrac{k_x}{k} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{k_y}{k} = \dfrac{1}{2}$, donc $\boxed{\theta = 30°}$.

6.

$$\boxed{\overrightarrow{E}(x,y,t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k\sqrt{3}}{2}x - \frac{k}{2}y\right)\overrightarrow{u_z}}$$

Exemple. Application n°2 — Longueur d'onde et angle de propagation

Une OEMPPS lumineuse se propage dans l'air à $c = 3.10^8$ m/s, de vecteur d'onde $\left(k_x = \dfrac{k}{2},\ k_y = 0,\ k_z = \dfrac{k\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Calculer λ sachant que $k = 2\pi.10^7$ rad/m.
2. Donner la direction de propagation et l'angle avec (Ox).

Solution.

1. $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{2\pi.10^7} = \boxed{10^{-7} \text{ m}}$.

2. $\overrightarrow{k}$ est contenu dans le plan (xOz) ($k_y = 0$). L'angle avec (Ox) vérifie $\cos\theta = \dfrac{k_x}{k} = \dfrac{1}{2}$, soit $\boxed{\theta = 60°}$.

4.3 Déduire le champ magnétique (ou électrique) à l'aide des propriétés des ondes planes

Méthode.
Pour une OPPS se propageant dans le vide ou l'air :

1. $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont **transverses** (perpendiculaires à $\overrightarrow{k}$) ;
2. $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{B}$;
3. $E = c.B$;
4. $\left(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k}\right)$ forment un **trièdre direct**.

En notant $\overrightarrow{u_E}$, $\overrightarrow{u_B}$, $\overrightarrow{u_k}$ les vecteurs unitaires associés, la propriété (4) se traduit par les relations cycliques :

$$\overrightarrow{u_E} \wedge \overrightarrow{u_B} = \overrightarrow{u_k} \qquad \overrightarrow{u_B} \wedge \overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{u_E} \qquad \overrightarrow{u_k} \wedge \overrightarrow{u_E} = \overrightarrow{u_B}$$

Connaissant deux des trois directions, on obtient la troisième par un simple produit vectoriel, puis la norme manquante par $E = c.B$.

Exemple. Direction du champ électrique à partir du champ magnétique
Une OEM plane progressive sinusoïdale se propage dans le vide suivant les y croissants.

1. Donner la direction de $\overrightarrow{k}$ et de $\overrightarrow{S}$ (vecteur de Poynting).
2. Donner l'expression de $\overrightarrow{B}$, sachant qu'il est selon (Ox).
3. Par les propriétés des ondes planes, trouver l'expression de $\overrightarrow{E}$.

Solution.
1. $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{S}$ (toujours colinéaire à la direction de propagation) sont selon $\boxed{+\overrightarrow{u_y}}$.
2. $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t - ky)\overrightarrow{u_x}$.
3. On cherche $\overrightarrow{u_E}$ tel que $\overrightarrow{u_B} \wedge \overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{u_E}$: avec $\overrightarrow{u_B} = \overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_z}$, donc $\overrightarrow{u_E} = \overrightarrow{u_z}$. Avec $E_0 = cB_0$:

$$\boxed{\overrightarrow{E} = cB_0 \cos(\omega t - ky)\overrightarrow{u_z}}$$

Exemple. Application n°2 — Champ magnétique à partir du champ électrique, propagation oblique
Une OEMPPS se propage dans l'air, de vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = \left(\frac{k}{2}, 0, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$. Le champ électrique est porté par $(Oy) > 0$. En déduire l'expression de $\overrightarrow{B}$.

Solution.
On cherche $\overrightarrow{u_B}$ tel que $\overrightarrow{u_k} \wedge \overrightarrow{u_E} = \overrightarrow{u_B}$. Avec $\overrightarrow{u_k} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{u_E} = (0, 1, 0)$:

$$\overrightarrow{u_B} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \wedge (0, 1, 0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Avec $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$:

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{E_0}{c}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u_x} + \frac{1}{2}\overrightarrow{u_z}\right)\cos\left(\omega t - \frac{k}{2}x - \frac{k\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

4.4 Déduire le champ magnétique (ou électrique) à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday (ou Ampère)

Méthode.

On utilise la notation complexe pour transformer Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ (ou Maxwell-Ampère $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ dans l'air, sans courant) en une relation algébrique :

$$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E} = \omega \overrightarrow{B} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \, \omega \overrightarrow{E}$$

On résout pour la composante inconnue, en s'aidant si besoin de la transversalité $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{E} = 0$ (conséquence de Maxwell-Gauss dans le vide).

Exemple. Retrouver $\overrightarrow{E}$ par Maxwell-Faraday en notation complexe

On reprend l'onde de l'application 1 précédente : propagation suivant $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t - ky)\overrightarrow{u_x}$. Retrouver $\overrightarrow{E}$ par Maxwell-Faraday en notation complexe.

Solution.

En complexe, $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u_y}$. La relation $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E} = \omega \overrightarrow{B}$ s'écrit, avec $\overrightarrow{E} = (E_x, E_y, E_z)$:

$$k\overrightarrow{u_y} \wedge (E_x, E_y, E_z) = (kE_z,\ 0,\ -kE_x) = \omega B_0 (1, 0, 0)$$

D'où $E_z = \dfrac{\omega B_0}{k} = cB_0$ et $E_x = 0$. La transversalité $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{E} = 0$ donne $kE_y = 0$, soit $E_y = 0$:

$$\boxed{\overrightarrow{E} = cB_0 \cos(\omega t - ky)\overrightarrow{u_z}}$$

résultat identique à celui obtenu par les propriétés des ondes planes.

Exemple. Application n°2 — Champ électrique par Maxwell-Ampère dans l'air

Une OEMPPS se propage dans l'air selon les x décroissants : $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t + kx)\overrightarrow{u_y}$. En déduire $\overrightarrow{E}$.

Solution.

La phase $\omega t + kx = \omega t - (-k)x$ donne $\overrightarrow{k} = -k\overrightarrow{u_x}$. Maxwell-Ampère dans l'air (sans courant) s'écrit en complexe :

$$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \, \omega \overrightarrow{E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E} = -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega} \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B}$$

Avec $\overrightarrow{k} = (-k, 0, 0)$ et $\overrightarrow{B} = (0, B_0, 0)$: $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B} = (0, 0, -kB_0)$. En utilisant $\dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = c^2$ et $\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{1}{c}$:

$$\overrightarrow{E} = -c^2 \left(0, 0, -\frac{kB_0}{\omega}\right) = (0, 0, cB_0)$$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = cB_0 \cos(\omega t + kx)\overrightarrow{u_z}}$$

4.5 Vérifier qu'un champ est solution de l'équation de propagation et en déduire la relation de dispersion

Méthode.

On substitue le champ dans l'équation de propagation $\Delta\vec{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} = \vec{0}$:

1. on calcule séparément $\Delta\vec{U}$ et $\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}$ (Chapitre 1, méthode 1.5) ;
2. on substitue dans l'équation : l'égalité, vraie pour tout x, t, n'est possible que si une condition liant k et ω est vérifiée ;
3. cette condition est la **relation de dispersion**.

Exemple. Vérifier une solution et tracer la relation de dispersion

L'équation de propagation d'une OPPS dans l'air est $c^2\Delta\vec{B} - \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

1. Montrer que $\vec{B}(x,t) = B_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ est solution.
2. Rappeler la relation de dispersion liant k, ω, c. Représenter k en fonction de ω.

Solution.

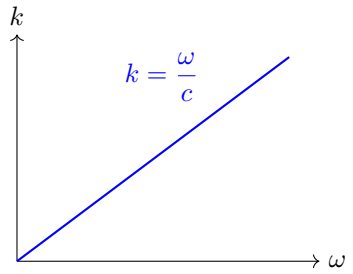
1. $\Delta\vec{B} = \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2} = -k^2\vec{B}$ et $\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{B}$. En substituant :

$$c^2(-k^2\vec{B}) - (-\omega^2\vec{B}) = (\omega^2 - c^2k^2)\vec{B}$$

Cette expression est nulle pour tout x, t si et seulement si $\omega^2 = c^2k^2$: le champ est donc solution, sous cette condition.

2.

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$



Exemple. Application n°2 — Équation de propagation donnée a priori

Une OEMPPS se propage dans l'air : $\vec{B} = B_0\cos(\omega t + kx)\vec{u_y}$.

1. Donner l'équation de propagation associée.
2. En déduire la relation de dispersion.

Solution.

1.

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

2. Avec $\Delta\vec{B} = -k^2\vec{B}$ et $\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{B}$:

$$-k^2\vec{B} + \mu_0\varepsilon_0\omega^2\vec{B} = \vec{0} \;\Rightarrow\; k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 \;\Rightarrow\; \boxed{k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}}$$

4.6 Étudier la superposition de deux ondes planes progressives

Méthode.
On additionne les expressions des deux ondes et on utilise $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$:

- ondes se propageant **dans le même sens** (déphasées de φ) : l'onde résultante reste **progressive**, de même direction, mais d'amplitude dépendant de φ — **interférences** ;
- ondes se propageant en **sens opposés** : le résultat se factorise en une fonction de x seule $\times$ une fonction de t seule — **onde stationnaire**, qui ne progresse plus (nœuds fixes).

Exemple. Superposition de deux ondes — interférences et onde stationnaire
$\overrightarrow{E_1}(x,t) = E_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\overrightarrow{u_y}$ se propage dans le vide.

1. On superpose une deuxième onde, même amplitude et pulsation, se propageant dans le **même sens**, déphasée de φ. Donner le champ résultant ; que devient-il pour $\varphi = 0$? Conclure.
2. On superpose une deuxième onde se propageant en **sens opposé**, déphasée de φ. Donner le champ résultant. Conclure.

Solution.
1. Même sens. Avec $A = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$ et $\overrightarrow{E_2} = E_0\sin(A+\varphi)\overrightarrow{u_y}$:

$$\boxed{\overrightarrow{E_{tot}}(x,t) = 2E_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)\overrightarrow{u_y}}$$

C'est encore une onde progressive, d'amplitude $2E_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ dépendant du déphasage : **interférences**. Pour $\varphi = 0$: $\overrightarrow{E_{tot}} = 2\overrightarrow{E_1}$ — interférences totalement **constructives**.
2. Sens opposé. Avec $\overrightarrow{E_2} = E_0\sin\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)\overrightarrow{u_y}$:

$$\boxed{\overrightarrow{E_{tot}}(x,t) = 2E_0\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\overrightarrow{u_y}}$$

Conclusion : l'expression se factorise en une fonction de x et une fonction de t — ce n'est plus de la forme $f(t \mp x/c)$: c'est une **onde stationnaire**. Les points où $\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) = 0$ sont des **nœuds** fixes, où $\overrightarrow{E_{tot}} = \overrightarrow{0}$ à tout instant.

5

Énergie d'une onde électromagnétique

Acquis d'Apprentissage.

- Savoir calculer le vecteur de Poynting d'une onde plane, sa valeur moyenne temporelle, et la puissance moyenne qu'elle transporte à travers une surface (plane ou non).
- Savoir calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique d'une onde plane.
- Savoir vérifier l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique.

Propriété. Équation de conservation de l'énergie électromagnétique — cas général

En posant $\overrightarrow{S} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu}$ (vecteur de Poynting, en W.m^{-2}) et $U = \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \dfrac{1}{2\mu}B^2$ (densité volumique d'énergie électromagnétique, en J.m^{-3}), la conservation de l'énergie s'écrit, sous forme locale, pour un milieu matériel quelconque :

$$div(\overrightarrow{S}) + \frac{\partial U}{\partial t} = -\overrightarrow{J}.\overrightarrow{E}$$

et sous forme intégrale, pour un volume τ délimité par une surface fermée Σ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{S}.\overrightarrow{d\Sigma} - \iiint_{\tau} \overrightarrow{J}.\overrightarrow{E}\, d\tau$$

Le terme $-\overrightarrow{J}.\overrightarrow{E}$ représente la puissance dissipée par effet Joule ; il est nul dans un milieu sans charges libres (vide, air), où l'équation se réduit à $div(\overrightarrow{S}) + \dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$.

5.1 Déterminer le vecteur de Poynting, sa valeur moyenne et la puissance moyenne rayonnée

Méthode.

Pour une onde plane sinusoïdale dont on connaît $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ (déterminés au besoin avec les méthodes du Chapitre 4) :

1. on calcule $\overrightarrow{S} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$, qui se simplifie en $\overrightarrow{S} = \varepsilon_0 c E^2 \overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u}$ unitaire selon la propagation) puisque $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{B}$ et $E = cB$;
2. on calcule sa valeur moyenne temporelle, avec $\langle \cos^2(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}) \rangle_T = \dfrac{1}{2}$;
3. on en déduit la puissance moyenne rayonnée à travers une surface Σ : $P_{moy} = \displaystyle\iint_{\Sigma} \langle \overrightarrow{S} \rangle.\overrightarrow{d\Sigma}$ — simple produit $\langle S \rangle \times \Sigma$ si la surface est plane et perpendiculaire à la propagation, sinon une véritable intégrale de surface (par exemple sur une couronne) ;
4. on calcule la densité volumique d'énergie $U = \varepsilon_0 E^2$.

Exemple. Poynting, valeur moyenne et puissance rayonnée d'une OPPS

Le champ électrique d'une onde électromagnétique est $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x}$.

1. Par les propriétés des ondes planes, déduire l'expression de $\overrightarrow{B}$.
2. a) Donner l'expression du vecteur de Poynting. b) En déduire sa valeur moyenne temporelle.
3. Déterminer la puissance moyenne de rayonnement à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.

4. Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

Solution.

1. Avec $\overrightarrow{u_k} \wedge \overrightarrow{u_E} = \overrightarrow{u_B}$ (Chapitre 4) : $\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{u_y}$, donc $\overrightarrow{u_B} = \overrightarrow{u_y}$, avec $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$:

$$\overrightarrow{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$$

2a.

$$\overrightarrow{S} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\,(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y}) = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}$$

(on a utilisé $\dfrac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c$).

2b.

$$\boxed{\langle \overrightarrow{S} \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \overrightarrow{u_z}}$$

3.

$$\boxed{P_{moy} = \langle \overrightarrow{S} \rangle . \overrightarrow{S}_{surface} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\, S}$$

4.

$$\boxed{U(z,t) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)}$$

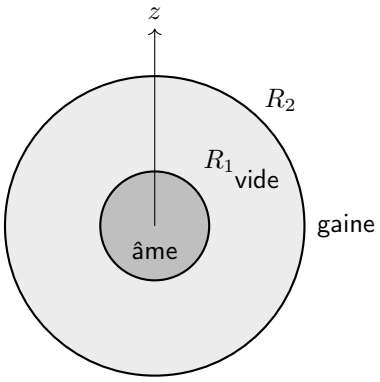
Exemple. Application n°2 — Câble coaxial : intégration sur une couronne

Un câble coaxial de longueur L est formé d'une âme cylindrique pleine de rayon R_1 et d'une gaine de rayon R_2, séparées par du vide, d'axe (Oz). Une onde s'y propage, de champ électrique $\overrightarrow{E} = E(r)e^{i(kz-\omega t)}\overrightarrow{u_r}$, avec $E(R_1) = E_1$.

1. Faire un schéma du système.
2. Par Maxwell-Gauss, déterminer $E(r)$ en fonction de E_1, R_1, r.
3. Déterminer $\overrightarrow{B}$ associé.
4. Déterminer $\overrightarrow{S}$ et sa valeur moyenne temporelle.
5. Déterminer la puissance moyenne P transportée par le câble.
6. Déterminer la densité volumique d'énergie, puis l'énergie électromagnétique moyenne emmagasinée sur une longueur L.

Solution.

1. Schéma du système :



2. Entre R_1 et R_2, le vide ne contient pas de charge : $div(\overrightarrow{E}) = 0$. Le champ ne dépendant que de r (le facteur $e^{i(kz-\omega t)}$ est constant vis-à-vis de $\partial/\partial r$) :

$$\frac{1}{r}\frac{d(rE(r))}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad rE(r) = cste$$

Avec $E(R_1) = E_1$, la constante vaut $E_1 R_1$:

$$\boxed{E(r) = \frac{E_1 R_1}{r}} \quad \text{(décroissance en } 1/r \text{ entre } R_1 \text{ et } R_2)$$

3. L'onde se propage selon $\overrightarrow{u_z}$; avec $\overrightarrow{u_k} \wedge \overrightarrow{u_E} = \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\theta}$ et $B = \dfrac{E}{c}$:

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{E_1 R_1}{cr} e^{i(kz-\omega t)} \overrightarrow{u_\theta}$$

4. En notation réelle, $\overrightarrow{S} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 c \left(\dfrac{E_1 R_1}{r}\right)^2 \cos^2(kz - \omega t)\overrightarrow{u_z}$, soit en moyenne :

$$\boxed{\langle \overrightarrow{S} \rangle(r) = \frac{\varepsilon_0 c E_1^2 R_1^2}{2r^2} \overrightarrow{u_z}}$$

5. La puissance moyenne s'obtient en intégrant $\langle S \rangle$ sur la couronne comprise entre R_1 et R_2 (et non sur une simple surface plane), avec $d\Sigma = 2\pi r\, dr$:

$$P = \int_{R_1}^{R_2} \langle S \rangle(r)\, 2\pi r\, dr = \pi \varepsilon_0 c E_1^2 R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{P = \pi \varepsilon_0 c E_1^2 R_1^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

6. $U(r) = \varepsilon_0 E(r)^2 \cos^2(kz - \omega t)$, de moyenne $\langle U \rangle(r) = \dfrac{\varepsilon_0 E_1^2 R_1^2}{2r^2}$. En intégrant sur le volume de vide ($dV = 2\pi r\, dr\, dz$) sur une longueur L :

$$\langle W \rangle = \int_0^L dz \int_{R_1}^{R_2} \langle U \rangle(r)\, 2\pi r\, dr = L\, \pi \varepsilon_0 E_1^2 R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{\langle W \rangle = \pi \varepsilon_0 E_1^2 R_1^2\, L \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Remarque : on vérifie que $\langle W \rangle = \dfrac{L}{c} P$: l'énergie stockée sur la longueur L est exactement celle que transporterait la puissance P pendant le temps de transit L/c — cohérent avec une énergie qui se propage à la vitesse c (cf. remarque suivante).

5.2 Vérifier l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique

Méthode.
Dans le vide ou l'air (sans charge ni courant), il s'agit de vérifier que $\overrightarrow{S}$ et U, calculés pour l'onde considérée, satisfont :

$$div(\overrightarrow{S}) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

On calcule séparément les deux termes (en utilisant $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$ pour dériver un carré de cosinus), puis on vérifie que leur somme s'annule **grâce à la relation de dispersion** $k = \dfrac{\omega}{c}$ établie au Chapitre 4 — c'est elle qui assure la cohérence de l'ensemble.

Exemple. Vérifier la conservation de l'énergie pour une OPPS
Une OPPS se propage dans l'air, de champ électrique $\overrightarrow{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$, à laquelle sont associées (Chapitre 4 et 5) :

$$\overrightarrow{S}(x,t) = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x} \qquad ; \qquad U(x,t) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Vérifier la conservation de l'énergie électromagnétique.

Solution.
Dans l'air, en l'absence de charges et de courants, on vérifie $div(\overrightarrow{S}) + \dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$. Avec $\overrightarrow{S} = S_x(x,t)\overrightarrow{u_x}$:

$$div(\overrightarrow{S}) = \frac{\partial S_x}{\partial x} = \varepsilon_0 c E_0^2 \times 2k\cos(\omega t - kx)\sin(\omega t - kx) = \varepsilon_0 ckE_0^2 \sin\left(2(\omega t - kx)\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varepsilon_0 E_0^2 \times (-2\omega)\cos(\omega t - kx)\sin(\omega t - kx) = -\varepsilon_0 \omega E_0^2 \sin\left(2(\omega t - kx)\right)$$

D'où :

$$div(\overrightarrow{S}) + \frac{\partial U}{\partial t} = \varepsilon_0 E_0^2 \sin\left(2(\omega t - kx)\right)(ck - \omega)$$

La relation de dispersion dans l'air impose $k = \dfrac{\omega}{c}$, donc $ck - \omega = 0$: on retrouve bien

$$\boxed{div(\overrightarrow{S}) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0}$$

La conservation de l'énergie électromagnétique est donc vérifiée.

Remarque. Vitesse de propagation de l'énergie
En considérant un cylindre de base S, perpendiculaire à la direction de propagation, et de hauteur $v\,dt$ (v étant la vitesse de propagation de l'énergie), l'énergie contenue dans ce cylindre est $dW = U.S.v\,dt$. Cette énergie correspond exactement à celle qui traverse la base S pendant dt, soit $\langle S\rangle.S.dt$ (flux du vecteur de Poynting). En identifiant :

$$U.v = \langle S\rangle \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\langle S\rangle}{U} = \frac{\varepsilon_0 c E^2}{\varepsilon_0 E^2} = c$$

Conclusion : dans le vide (ou l'air), l'énergie électromagnétique se propage à la même vitesse c que l'onde elle-même.

Remarque. Énergie d'une onde stationnaire
Pour l'onde stationnaire obtenue en superposant deux ondes de même amplitude E_0 se propageant en sens opposés (Chapitre 4, méthode 4.6) : $\overrightarrow{E_{tot}} = 2E_0\cos(\omega t)\cos(kx)\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{B_{tot}} = \dfrac{2E_0 k}{\omega}\sin(kx)\sin(\omega t)\overrightarrow{u_z}$, le vecteur de Poynting résultant est :

$$\overrightarrow{S_{tot}} = \frac{E_0^2 k}{\mu_0 \omega}\sin(2kx)\sin(2\omega t)\overrightarrow{u_x}$$

Sa valeur moyenne temporelle est **nulle** : $\langle\overrightarrow{S_{tot}}\rangle = \overrightarrow{0}$. Conclusion : une onde stationnaire ne transporte, en moyenne, **aucune énergie** — elle oscille localement entre champ électrique et champ magnétique sans se propager. Si les deux ondes superposées ont des amplitudes différentes $E_1 \neq E_2$, la valeur moyenne du vecteur de Poynting résultant n'est plus nulle : une partie de l'énergie continue alors à se propager dans le sens de l'onde la plus intense.

Récap. Aspect corpusculaire d'une OEM (photon)

Une onde électromagnétique peut aussi être décrite comme un flux de photons, particules sans masse, d'énergie et de quantité de mouvement quantifiées :

$$E_{photon} = h\nu = \hbar\omega \qquad ; \qquad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

où $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s est la constante de Planck et $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$. La pression de radiation exercée sur un obstacle vaut :

$p_{rad} = 2U$ (miroir parfaitement réfléchissant) ; $p_{rad} = U$ (lame parfaitement transparente)

U étant la densité volumique d'énergie de l'onde incidente. Remarque : ce volet du cours n'a fait l'objet d'aucun exercice dans les cinq dernières années d'annales ; il est rappelé ici pour mémoire. On retrouve une expression cohérente de p_{rad}, obtenue par une approche différente, au Chapitre 6.

6

Compléments : milieu conducteur et réflexion

Acquis d'Apprentissage.

- Savoir établir la relation de dispersion (complexe) d'une onde électromagnétique se propageant dans un conducteur.
- Savoir construire les champs incident, réfléchi et résultant lors de la réflexion d'une onde plane sur un conducteur parfait, et en déduire la pression de radiation.

6.1 Établir la relation de dispersion d'une onde dans un conducteur

Méthode.
Dans un métal de conductivité γ, la densité de courant suit la loi d'Ohm locale $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$. En reportant ce terme dans l'équation de propagation générale (Chapitre 2), le terme de conduction domine le terme en $\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$, et l'équation de propagation devient une équation **du premier ordre** en temps :

$$\Delta \overrightarrow{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$$

En notation complexe ($\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i(kz-\omega t)}$ par exemple), $\Delta \overrightarrow{E} \to -k^2 \overrightarrow{E}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \to -i\omega \overrightarrow{E}$, ce qui conduit à une relation de dispersion **complexe** : $k^2 = i\mu_0 \gamma \omega$. Le nombre d'onde k est donc complexe, ce qui traduit l'**atténuation** de l'onde lors de sa pénétration dans le conducteur (effet de peau), à la différence d'une propagation non amortie dans le vide.

Exemple. Relation de dispersion d'une onde dans un métal conducteur
On considère la propagation d'une onde électromagnétique dans un métal de conductivité γ. Le champ électrique associé, en notation complexe, est $\overrightarrow{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)} \overrightarrow{u_x}$ (E_0, ω, k constantes).

1. En utilisant Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, trouver $\overrightarrow{B}$.
2. Calculer $\Delta \overrightarrow{E}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$.
3. Le champ vérifie $\Delta \overrightarrow{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$. Montrer que $k^2 = i\mu_0 \gamma \omega$.

Solution.
1. $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de z, t ; le rotationnel d'un champ selon $\overrightarrow{u_x}$ ne dépendant que de z se réduit à :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z} \overrightarrow{u_y} = ik\, E_0 e^{i(kz-\omega t)} \overrightarrow{u_y}$$

Avec $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ en complexe, Maxwell-Faraday donne :

$$ik\, E_0 e^{i(kz-\omega t)} \overrightarrow{u_y} = i\omega \overrightarrow{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{B} = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(kz-\omega t)} \overrightarrow{u_y}}$$

2.

$$\Delta \overrightarrow{E} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial z^2} = (ik)^2 \overrightarrow{E} = -k^2 \overrightarrow{E} \qquad ; \qquad \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = -i\omega \overrightarrow{E}$$

3. En substituant :

$$-k^2 \overrightarrow{E} - \mu_0 \gamma (-i\omega \overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(-k^2 + i\mu_0 \gamma \omega\right) \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$$

Comme $\overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{0}$:

$$\boxed{k^2 = i\mu_0\gamma\omega}$$

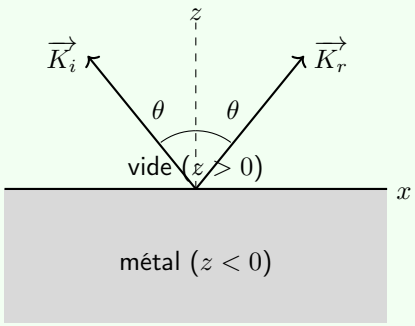
Remarque : à la différence de $k = \omega/c$ dans le vide (Chapitre 4), k est ici **complexe** : sa partie imaginaire traduit l'atténuation de l'onde dans le métal.

6.2 Étudier la réflexion d'une onde plane sur un conducteur parfait et la pression de radiation

Méthode.
Pour une onde incidente arrivant avec un angle θ par rapport à la normale d'un conducteur parfait :

1. on écrit le vecteur d'onde incident $\overrightarrow{K_i}$, dont la composante **tangentielle** à l'interface est conservée par réflexion, tandis que la composante **normale** change de signe pour $\overrightarrow{K_r}$;
2. on déduit $\overrightarrow{B_i}$ puis $\overrightarrow{B_r}$ par $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{u_k} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$ (propriétés des ondes planes, Chapitre 4) ;
3. la condition aux limites sur un conducteur parfait (champ tangentiel nul à la surface) fixe l'amplitude du champ réfléchi ;
4. on additionne champs incident et réfléchi (onde résultante), puis on étudie son comportement au voisinage de la surface ($z = 0$) ;
5. on calcule enfin la force surfacique (à l'aide de la formule donnée, faisant intervenir le courant surfacique induit) puis sa valeur moyenne : la **pression de radiation**.

Exemple. Réflexion sur un conducteur parfait et pression de radiation
Une onde électromagnétique plane se propage dans le vide ($z > 0$) et arrive sur un conducteur parfait occupant $z < 0$, avec un angle d'incidence θ (par rapport à la normale $\overrightarrow{u_z}$). Le champ électrique incident est $\overrightarrow{E_i} = E_0 \cos\left(\omega t - \overrightarrow{K_i}.\overrightarrow{OM}\right) \overrightarrow{u_y}$.



1. Donner $\overrightarrow{E_i}$ explicitement, avec $\overrightarrow{K_i} = k(\sin\theta, 0, -\cos\theta)$.
2. En déduire $\overrightarrow{B_i}$.
3. Donner $\overrightarrow{K_r}$, puis $\overrightarrow{E_r}$ sachant que $\overrightarrow{E_{0r}} = -E_0\overrightarrow{u_y}$.
4. En déduire $\overrightarrow{B_r}$.
5. Donner les champs résultants $\overrightarrow{E_{tot}}$ et $\overrightarrow{B_{tot}}$.
6. Que deviennent ces expressions en $z = 0$?

On donne, au voisinage du conducteur, $\sigma(M) = 0$ et $\overrightarrow{J_s} = \dfrac{2E_0}{c\mu_0}\cos\theta\cos(\omega t - k\sin\theta\, x)\overrightarrow{u_y}$, ainsi que la force surfacique $\overrightarrow{dF_M} = \dfrac{1}{2}\left[\sigma(M)\overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dS_M} + \left(\overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{B}(M)\right).\overrightarrow{dS_M}\right]$.

7. En déduire la pression de radiation moyenne $\langle P(\theta)\rangle$, et la représenter.

Solution.

1. $\overrightarrow{K_i}.\overrightarrow{OM} = k\sin\theta\, x - k\cos\theta\, z$, donc :

$$\overrightarrow{E_i} = E_0\cos(\omega t - k\sin\theta\, x + k\cos\theta\, z)\overrightarrow{u_y}$$

2. Avec $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{u_{K_i}} \wedge \overrightarrow{E_i}}{c}$ et $\overrightarrow{u_{K_i}} = (\sin\theta, 0, -\cos\theta)$:

$$\boxed{\overrightarrow{B_i} = \frac{E_0}{c}\left(\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_z}\right)\cos(\omega t - k\sin\theta\, x + k\cos\theta\, z)}$$

3. La composante tangentielle (x) de $\overrightarrow{K}$ est conservée, la composante normale (z) change de signe : $\overrightarrow{K_r} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$. Avec $\overrightarrow{E_{0r}} = -E_0\overrightarrow{u_y}$:

$$\boxed{\overrightarrow{E_r} = -E_0\cos(\omega t - k\sin\theta\, x - k\cos\theta\, z)\overrightarrow{u_y}}$$

4. De même, $\overrightarrow{B_r} = \dfrac{\overrightarrow{u_{K_r}} \wedge \overrightarrow{E_r}}{c}$:

$$\boxed{\overrightarrow{B_r} = \frac{E_0}{c}\left(\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z}\right)\cos(\omega t - k\sin\theta\, x - k\cos\theta\, z)}$$

5. En posant $\varphi = \omega t - k\sin\theta\, x$, on additionne $\overrightarrow{E_i} + \overrightarrow{E_r}$ et $\overrightarrow{B_i} + \overrightarrow{B_r}$ à l'aide des formules de transformation somme-produit (méthode 4.6) :

$$\boxed{\overrightarrow{E_{tot}} = -2E_0\sin(k\cos\theta\, z)\sin(\varphi)\overrightarrow{u_y}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B_{tot}} = \frac{2E_0}{c}\Big[\cos\theta\cos(k\cos\theta\, z)\cos(\varphi)\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\sin(k\cos\theta\, z)\sin(\varphi)\overrightarrow{u_z}\Big]}$$

6. En $z = 0$: $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$, donc :

$$\overrightarrow{E_{tot}}(z=0) = \overrightarrow{0} \qquad \text{(continuité : champ tangentiel nul sur un conducteur parfait)}$$

$$\overrightarrow{B_{tot}}(z=0) = \frac{2E_0\cos\theta}{c}\cos(\varphi)\overrightarrow{u_x} \qquad \text{(purement tangentiel)}$$

7. Avec $\sigma = 0$, seul le second terme de $\overrightarrow{dF_M}$ subsiste : $\overrightarrow{dF_M} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{B_{tot}}(z=0)\right).\overrightarrow{dS_M}$. Avec $\overrightarrow{J_s} = \dfrac{2E_0\cos\theta}{c\mu_0}\cos(\varphi)\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{B_{tot}}(z=0) = \dfrac{2E_0\cos\theta}{c}\cos(\varphi)\overrightarrow{u_x}$:

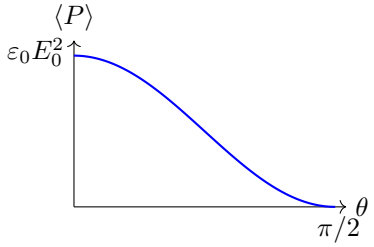
$$\overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{B_{tot}}(z=0) = \frac{4E_0^2\cos^2\theta}{c^2\mu_0}\cos^2(\varphi)\,(\overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{u_x}) = -\frac{4E_0^2\cos^2\theta}{c^2\mu_0}\cos^2(\varphi)\overrightarrow{u_z}$$

D'où, en utilisant $\dfrac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$:

$$\frac{\overrightarrow{dF_M}}{dS_M} = -2\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\theta\,\cos^2(\varphi)\overrightarrow{u_z}$$

La force est dirigée selon $-\overrightarrow{u_z}$: elle pousse bien la surface vers l'intérieur du métal, comme attendu pour une pression de radiation. En moyenne temporelle ($\langle\cos^2\varphi\rangle = \frac{1}{2}$) :

$$\boxed{\langle P(\theta)\rangle = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2\theta}$$



Cohérence : pour une incidence normale ($\theta = 0$), on retrouve $\langle P(0)\rangle = \varepsilon_0 E_0^2 = 2\langle U_{incident}\rangle$ — exactement la formule $p_{rad} = 2U$ du Chapitre 5 (aspect corpusculaire), obtenue ici par une approche complètement différente (force de Laplace sur le courant surfacique) : les deux méthodes se confirment mutuellement.