Fiche Méthodes

Modélisation Mathématique

Module : SM401

Un recueil de méthodes pour accompagner vos révisions

Doryan Denis

Version du document	**v1.0**
Première édition	25 juin 2026
Dernière mise à jour	June 26, 2026

Table des matières

1 Équations non linéaires **2**
- 1.1 Localiser et dénombrer les racines d'une équation non linéaire . . . 2
- 1.2 Approximer une racine par la méthode de la dichotomie . . . 3
- 1.3 Approximer une racine par la méthode de Newton-Raphson . . . 4
- 1.4 Transformer une équation en un problème de point fixe et étudier sa convergence . . . 5
- 1.5 Interpréter, sur un graphe, le comportement de la dichotomie et de Newton . . . 6
- 1.6 Résoudre un système de deux équations non linéaires par la méthode de Newton . . . 7

2 Équations différentielles ordinaires **9**
- 2.1 Résoudre analytiquement une EDO linéaire du 1er ordre avec second membre . . . 9
- 2.2 Approximer une EDO par la méthode d'Euler explicite . . . 10
- 2.3 Approximer une EDO par la méthode d'Euler implicite . . . 10
- 2.4 Approximer une EDO par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 . . . 11
- 2.5 Comparer la précision de deux schémas numériques à l'aide de la solution exacte . . . 12
- 2.6 Transformer une équation (ou un système) d'ordre supérieur en système du 1er ordre . . . 12

3 Interpolation polynomiale **15**
- 3.1 Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange . . . 15
- 3.2 Construire un polynôme d'interpolation par la méthode des différences divisées . . . 16
- 3.3 Majorer l'erreur d'interpolation . . . 17
- 3.4 Construire une formule de quadrature à partir d'un polynôme d'interpolation . . . 18

4 Intégration numérique **20**
- 4.1 Calculer une intégrale double sur $\mathbb{R}^2$ par passage en coordonnées polaires (cas gaussien) . . . 20
- 4.2 Approximer une intégrale par la méthode des trapèzes composée . . . 21
- 4.3 Approximer une intégrale par la méthode de Simpson composée . . . 21
- 4.4 Majorer l'erreur de la méthode de Simpson . . . 22
- 4.5 Établir l'ordre d'une méthode de quadrature et en déduire l'effet d'une réduction du pas . . . 23

1

Équations non linéaires

Acquis d'Apprentissage.

- Localiser et dénombrer les racines d'une équation non linéaire $f(x) = 0$.
- Mettre en œuvre les méthodes de la dichotomie, de Newton-Raphson et du point fixe, et connaître leurs conditions de convergence.
- Interpréter le comportement de ces méthodes à partir d'un graphe.
- Étendre la méthode de Newton à un système de deux équations non linéaires.

1.1 Localiser et dénombrer les racines d'une équation non linéaire

Méthode.
Pour déterminer le nombre de racines réelles d'une équation $f(x) = 0$ sur un intervalle (ou sur $\mathbb{R}$ tout entier), on procède en général ainsi :

1. Repérer une éventuelle **symétrie** (parité, périodicité...) permettant de réduire l'étude à une partie du domaine.
2. Étudier les **variations** de f (signe de f') afin de découper le domaine d'étude en intervalles de monotonie.
3. Sur chaque intervalle de monotonie, appliquer le **théorème des valeurs intermédiaires** : si f est continue et strictement monotone sur un intervalle, et y change de signe, alors elle y admet une unique racine.
4. Conclure en sommant le nombre de racines trouvées sur chaque intervalle, en tenant compte de l'éventuelle symétrie repérée à l'étape 1.

Propriété. Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout réel K compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = K$.

En particulier, si $f(a)f(b) < 0$, alors f admet au moins une racine dans $]a, b[$; si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$, cette racine y est unique.

Exemple.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{x^2} - 4x^2.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet quatre solutions réelles, et qu'une seule de ces solutions appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Solution.
Parité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = e^{(-x)^2} - 4(-x)^2 = e^{x^2} - 4x^2 = f(x),$$

donc f est paire : il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$, les racines sur $\mathbb{R}^-$ s'en déduisant par symétrie.

Variations sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 8x = 2x\left(e^{x^2} - 4\right).$$

Sur $\mathbb{R}^+$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{x^2} = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln 4}$ (la racine positive de $x^2 = \ln 4$). Numériquement,

$\sqrt{\ln 4} \simeq 1.177$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{\ln 4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$4 - 4\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $f(0) = 1$ et $f(\sqrt{\ln 4}) = e^{\ln 4} - 4\ln 4 = 4 - 4\ln 4 \simeq -1.545$.

Racine sur $[0,1]$. Comme $1 < \sqrt{\ln 4}$, l'intervalle $[0,1]$ est entièrement contenu dans la zone où f est strictement décroissante. Or

$$f(1) = e - 4 \simeq -1.282.$$

Ainsi $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) \simeq -1.282 < 0$: par le théorème des valeurs intermédiaires, f admet une racine dans $]0,1[$, et cette racine est unique puisque f est strictement monotone sur cet intervalle.

Deuxième racine sur $\mathbb{R}^+$. Sur $[\sqrt{\ln 4}, +\infty[$, f est strictement croissante, avec $f(\sqrt{\ln 4}) \simeq -1.545 < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Il existe donc, par le même argument, une unique racine sur cet intervalle — et celle-ci est strictement supérieure à $\sqrt{\ln 4} \simeq 1.177$, donc n'appartient pas à $[0,1]$.

Conclusion. La fonction f admet exactement deux racines sur $\mathbb{R}^+$ (une dans $]0,1[$, une dans $]\sqrt{\ln 4}, +\infty[$), donc par parité deux racines opposées sur $\mathbb{R}^-$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc

quatre solutions réelles, dont une seule appartient à $[0,1]$.

1.2 Approximer une racine par la méthode de la dichotomie

Méthode.
Soit f continue sur $[a,b]$, admettant une unique racine simple r sur $[a,b]$, avec $f(a)f(b) < 0$. On construit une suite d'encadrements de plus en plus précis de r :

1. Poser $a_0 = a$, $b_0 = b$.
2. À l'étape n, calculer le milieu $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
3. Si $f(c_n) = 0$, alors $r = c_n$: on arrête.
4. Sinon, si $f(a_n)f(c_n) < 0$, poser $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$; sinon poser $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$.
5. Répéter jusqu'à ce que $b_n - a_n$ soit inférieur à la précision souhaitée ε.

À chaque itération, la longueur de l'encadrement est divisée par 2 :

$$b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0), \qquad |r - c_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

Remarque. Avantages / inconvénients
La dichotomie converge toujours dès que $f(a)f(b) < 0$, et le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre une précision donnée peut être calculé à l'avance. En revanche, elle est lente (l'erreur n'est divisée que par 2 à chaque étape) et ne décroît pas nécessairement de façon monotone.

Exemple.
Soit $f(x) = x^2 - 5$.

1. Effectuer 5 itérations de la méthode de la dichotomie sur $[2,3]$ pour approcher la racine positive de f.
2. Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision de 10^{-5}.

Solution.
1. Itérations. On a $f(2) = -1 < 0$ et $f(3) = 4 > 0$: l'encadrement initial est valide. Le tableau suivant

résume les 5 itérations :

n	c_n	$f(c_n)$	nouvel encadrement
0	2.5	$1.25 > 0$	$[2,\ 2.5]$
1	2.25	$0.0625 > 0$	$[2,\ 2.25]$
2	2.125	$-0.484 < 0$	$[2.125,\ 2.25]$
3	2.1875	$-0.215 < 0$	$[2.1875,\ 2.25]$
4	2.21875	$-0.077 < 0$	$[2.21875,\ 2.25]$

Après 5 itérations, $r \in [2.21875,\ 2.25]$, ce qui donne l'approximation

$$\boxed{r \simeq 2.219 \quad \text{(valeur exacte } \sqrt{5} \simeq 2.236\text{).}}$$

2. Nombre d'itérations pour 10^{-5}. On veut

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 10^5 \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{\ln(10^5)}{\ln 2} \simeq 16.61.$$

Le plus petit entier convenable est $n+1 = 17$, soit $n = 16$: il faut donc calculer $c_0, c_1, \ldots, c_{16}$, c'est-à-dire

$$\boxed{17 \text{ itérations.}}$$

1.3 Approximer une racine par la méthode de Newton-Raphson

Méthode.
Soit $f \in C^1[a,b]$ telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, admettant un zéro $\bar{x} \in [a,b]$. On construit la suite :

$$x_0 \in [a,b] \text{ donné}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

qui converge vers $\bar{x}$ à condition de choisir x_0 suffisamment proche de $\bar{x}$.

Géométriquement, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des x de la tangente à la courbe de f au point $(x_n, f(x_n))$.

Remarque. Zéros multiples
Si $\bar{x}$ est un zéro de multiplicité m (i.e. $f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \cdots = f^{(m-1)}(\bar{x}) = 0$ et $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$), la convergence de Newton devient seulement linéaire. On retrouve une convergence rapide en utilisant la formule itérative modifiée

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Exemple.
On considère la fonction $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ et α l'unique racine de f dans $[0,1]$ (étudiée à la méthode précédente). Écrire la méthode de Newton permettant d'approcher α, puis effectuer trois itérations en prenant $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Solution.
On a $f'(x) = 2xe^{x^2} - 8x = 2x\left(e^{x^2} - 4\right)$, donc la formule itérative de Newton s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n^2} - 4x_n^2}{2x_n\left(e^{x_n^2} - 4\right)}.$$

Itération 1. Avec $x_0 = 0.5$: $f(x_0) = e^{0.25} - 1 \simeq 0.284$ et $f'(x_0) = 2 \times 0.5 \times (e^{0.25} - 4) \simeq -2.716$, donc

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.284}{-2.716} \simeq 0.605.$$

Itération 2. Avec $x_1 \simeq 0.605$: $f(x_1) \simeq -0.021$ et $f'(x_1) \simeq -3.095$, donc

$$x_2 = 0.605 - \frac{-0.021}{-3.095} \simeq 0.598.$$

Itération 3. Avec $x_2 \simeq 0.598$: $f(x_2) \simeq -0.0001$ (déjà très proche de la racine) et $f'(x_2) \simeq -3.074$, donc

$$x_3 = 0.598 - \frac{-0.0001}{-3.074} \simeq \boxed{0.598.}$$

La méthode a convergé en seulement 3 itérations, contre 17 itérations nécessaires à la dichotomie pour une précision comparable.

1.4 Transformer une équation en un problème de point fixe et étudier sa convergence

Méthode.
Pour approcher une racine de $f(x) = 0$ par point fixe, on choisit une fonction g telle que

$$g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

(il existe en général plusieurs choix possibles de g). On étudie alors la convergence de la suite

$$p_0 \in [a, b], \qquad p_{n+1} = g(p_n)$$

à l'aide du théorème du point fixe.

Propriété. Théorème du point fixe
Soit $g \in C[a, b]$ telle que $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors g admet au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Si de plus g' existe sur $[a, b]$ et qu'il existe $0 < k < 1$ tel que $|g'(x)| \leq k$ pour tout $x \in [a, b]$, alors ce point fixe est unique, et pour tout $p_0 \in [a, b]$, la suite $(p_n)_n$ définie par $p_{n+1} = g(p_n)$ converge vers ce point fixe.

Exemple.
On reprend $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ et on pose

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e^{x^2}}.$$

1. Montrer que résoudre $f(x) = 0$ sur $[0, 1]$ revient à chercher un point fixe de g.
2. Étudier la convergence de la méthode du point fixe associée à g sur $[0, 1]$, puis effectuer deux itérations en prenant $x_0 = \frac{1}{2}$.

Solution.
1. Équivalence. On remarque que $g(x) = \frac{1}{2}e^{x^2/2}$. Alors

$$g(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{e^{x^2}} = 2x \Leftrightarrow e^{x^2} = 4x^2 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

(le passage au carré est licite car on cherche $x \in [0, 1] \subset \mathbb{R}^+$).

2. Convergence. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$ avec

$$g'(x) = \frac{x}{2}e^{x^2/2}.$$

Comme g' est croissante et positive sur $[0, 1]$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |g'(x)| = g'(1) = \frac{\sqrt{e}}{2} \simeq 0.824 < 1.$$

De plus g est croissante avec $g(0) = 0.5$ et $g(1) = \dfrac{\sqrt{e}}{2} \simeq 0.824$, donc $g([0,1]) = [0.5,\ 0.824] \subset [0,1]$. Le théorème du point fixe s'applique : la suite (p_n) converge vers l'unique point fixe de g dans $[0,1]$, quel que soit $p_0 \in [0,1]$.

Itérations. Avec $p_0 = 0.5$:

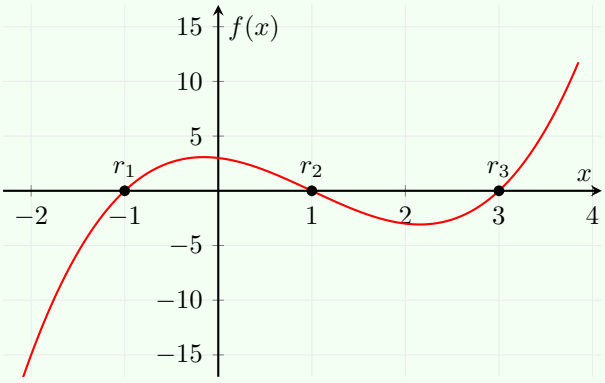
$$p_1 = g(0.5) = \frac{1}{2}e^{0.125} \simeq 0.567, \qquad p_2 = g(p_1) = \frac{1}{2}e^{p_1^2/2} \simeq \boxed{0.587.}$$

1.5 Interpréter, sur un graphe, le comportement de la dichotomie et de Newton

Méthode.
Lorsque f n'est connue que par son graphe (sans expression explicite), deux questions reviennent fréquemment :

- **Pour la dichotomie** : étant donné un encadrement initial $[a,b]$, on suit pas à pas le signe de f en a, b, puis à chaque milieu calculé : la racine trouvée est celle qui reste toujours encadrée par la suite des intervalles successifs, pas forcément la racine la plus proche du milieu de $[a,b]$ si ce dernier contient plusieurs racines.
- **Pour Newton** : pour garantir la convergence vers une racine r donnée, on choisit x_0 dans l'intervalle de monotonie de f contenant r (entre les deux extrema ou bords du domaine qui l'encadrent). En dehors de cet intervalle, un extremum proche peut faire *capturer* l'itération par une autre racine.

Exemple.
On considère $f(x) = (x-1)(x+1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, dont le graphe ci-dessous présente trois racines $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$.



1. Pour approcher $r_2 = 1$ par Newton, donner un intervalle dans lequel choisir x_0 pour garantir la convergence vers r_2.
2. En partant de l'encadrement $[-2,\ 3.5]$, vers quelle racine va converger la dichotomie ? Justifier en calculant les deux premiers milieux.

Solution.
1. Intervalle pour Newton. On a $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$, qui s'annule en

$$x = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \simeq -0.155 \text{ et } 2.155.$$

Entre ces deux points critiques (un maximum local en $1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, un minimum local en $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$), f est strictement décroissante et ne s'annule qu'en $r_2 = 1$: c'est exactement la zone à ne pas quitter, sous peine que la tangente "saute" par-dessus un extremum et converge vers r_1 ou r_3. On choisit donc

$$\boxed{x_0 \in \left]1 - \frac{2\sqrt{3}}{3},\ 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\ \simeq\ ]-0.155,\ 2.155[.}$$

2. Dichotomie sur $[-2,\ 3.5]$**.** On a $f(-2) = -15 < 0$ et $f(3.5) = 5.625 > 0$: l'encadrement contient les

trois racines, mais reste valide pour démarrer la méthode.
Milieu 1 : $c_0 = 0.75$, et $f(0.75) = (-0.25)(1.75)(-2.25) \simeq 0.984 > 0$. Comme $f(-2) < 0$ et $f(c_0) > 0$, le nouvel encadrement est $[-2,\ 0.75]$, qui ne contient plus que $r_1 = -1$.
Milieu 2 : $c_1 = -0.625$, et $f(-0.625) = (-1.625)(0.375)(-3.625) \simeq 2.209 > 0$. Comme $f(-2) < 0$ et $f(c_1) > 0$, le nouvel encadrement est $[-2,\ -0.625]$, qui encadre toujours $r_1 = -1$.
La méthode converge donc vers

$$\boxed{r_1 = -1,}$$

bien que l'encadrement initial contienne les trois racines : c'est la suite des signes calculés, et non la position du milieu initial, qui détermine la racine trouvée.

1.6 Résoudre un système de deux équations non linéaires par la méthode de Newton

Méthode.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, de classe C^1, dont la matrice jacobienne

$$DF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

est inversible. La méthode de Newton à deux variables s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - DF^{-1}_{(x_n,y_n)} \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix},$$

et converge vers une solution $(\bar{x}, \bar{y})$ de $F = (0, 0)$ pour (x_0, y_0) choisi suffisamment proche.

Exemple.
On s'intéresse au système en $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2\sin x_1 + 2\cos x_2 = 0 \\ -5x_2 + 2\sin x_2 + 2\cos x_1 = 0 \end{cases}$$

1. Écrire la recherche de solutions comme la recherche de zéros d'une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
2. Écrire la relation de récurrence de Newton et justifier que l'algorithme est globalement bien défini.
3. Effectuer une itération de Newton en partant de $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution.
1. La fonction F. On pose $F(x_1, x_2) = \big(-5x_1 + 2\sin x_1 + 2\cos x_2,\ -5x_2 + 2\sin x_2 + 2\cos x_1\big)$: le système équivaut à $F(x_1, x_2) = (0, 0)$.

2. Jacobienne et bonne définition. On calcule

$$DF_{(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} -5 + 2\cos x_1 & -2\sin x_2 \\ -2\sin x_1 & -5 + 2\cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout (x_1, x_2), les termes diagonaux vérifient $|-5 + 2\cos x_i| \geq 5 - 2 = 3$, tandis que les termes extra-diagonaux vérifient $|-2\sin x_i| \leq 2$. Le déterminant satisfait donc

$$|\det DF_{(x_1,x_2)}| \geq 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5 > 0,$$

donc $DF_{(x_1,x_2)}$ est inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$: l'algorithme de Newton est globalement bien défini, quel que soit le point de départ.

3. Une itération depuis $(1, 1)$. Par symétrie du système, $F(1, 1) = (-2.236,\ -2.236)$ et

$$DF_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -5 + 2\cos 1 & -2\sin 1 \\ -2\sin 1 & -5 + 2\cos 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -3.919 & -1.683 \\ -1.683 & -3.919 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de la forme $\begin{pmatrix} d & e \\ e & d \end{pmatrix}$: le vecteur $(1,1)$ en est un vecteur propre, de valeur propre $d+e \simeq -5.602$. On en déduit directement

$$DF^{-1}_{(1,1)}F(1,1) = \frac{F(1,1)}{d+e}(1,1) = \frac{-2.236}{-5.602}(1,1) \simeq 0.399\,(1,1),$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.399 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \boxed{\begin{pmatrix} 0.601 \\ 0.601 \end{pmatrix}}.$$

Récap.

Dichotomie : $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}, \quad |r - c_n| \leq \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$

Newton-Raphson : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (racine multiple : $x_{n+1} = x_n - m\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$).

Point fixe : $p_{n+1} = g(p_n)$, convergence garantie si $g([a,b]) \subset [a,b]$ et $|g'| \leq k < 1$ sur $[a,b]$.

Newton à deux variables : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - DF^{-1}_{(x_n,y_n)}F(x_n,y_n).$

2
Équations différentielles ordinaires

Acquis d'Apprentissage.

- Résoudre analytiquement une équation différentielle linéaire du 1er ordre avec second membre.
- Mettre en œuvre les schémas d'Euler explicite, d'Euler implicite et de Runge-Kutta d'ordre 4.
- Comparer la précision de deux schémas numériques à l'aide d'une solution exacte ou de référence.
- Transformer une équation (ou un système) d'ordre supérieur en un système du 1er ordre, et lui appliquer un schéma numérique.

2.1 Résoudre analytiquement une EDO linéaire du 1er ordre avec second membre

Méthode.
Pour résoudre une équation $y'(t) = ay(t) + g(t)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et g un second membre simple (polynôme, exponentielle, $\cos/\sin$...), on cherche la solution générale sous la forme

$$y = y_h + y_p,$$

où :

1. y_h est la solution générale de l'**équation homogène** $y'(t) = ay(t)$, obtenue par séparation des variables : $y_h(t) = Ce^{at}$, $C \in \mathbb{R}$.
2. y_p est une **solution particulière**, cherchée sous une forme analogue à celle de $g(t)$ (à coefficients indéterminés), que l'on détermine en substituant dans l'équation et en identifiant les coefficients des termes de même nature.

La constante C est ensuite fixée grâce à la **condition initiale**.

Exemple.
Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) = -2y(t) + \sin(t), \qquad y(0) = 1.$$

Solution.
Équation homogène. $y_h'(t) = -2y_h(t)$ donne, par séparation des variables, $\ln|y_h(t)| = -2t + K$, d'où

$$y_h(t) = Ce^{-2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière. On cherche $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$, donc $y_p'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$. En substituant :

$$-A\sin(t) + B\cos(t) = -2A\cos(t) - 2B\sin(t) + \sin(t).$$

Par identification des coefficients de $\cos(t)$ et $\sin(t)$:

$$\begin{cases} B = -2A \\ -A = -2B + 1 \end{cases} \Rightarrow -A = 4A + 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{2}{5}.$$

Solution générale.

$$y(t) = Ce^{-2t} - \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t).$$

Condition initiale. $y(0) = C - \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow C = \frac{6}{5}$. Finalement :

$$\boxed{y(t) = \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t).}$$

2.2 Approximer une EDO par la méthode d'Euler explicite

Méthode.
Pour le problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, on discrétise $[t_0, t_0+T]$ en pas h, avec $t_n = t_0+nh$, et on approche $y(t_n)$ par y_n défini par

$$y_0 = y(t_0), \qquad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

La méthode est d'ordre 1 et n'est stable que si $\dfrac{\partial f}{\partial y} < 0$ et $h < \dfrac{2}{|\partial f/\partial y|}$.

Exemple.
On reprend $y'(t) = -2y(t) + \sin(t)$, $y(0) = 1$. Donner la formule de la méthode d'Euler explicite, puis trouver une approximation de $y(0.2)$ pour un pas $h = 0.1$ en partant de $y_0 = 1$.

Solution.
Ici $f(t, y) = -2y + \sin(t)$, donc le schéma s'écrit $y_{n+1} = y_n + h(-2y_n + \sin(t_n))$, soit avec $h = 0.1$:

$$y_{n+1} = 0.8\, y_n + 0.1 \sin(t_n).$$

Itération 1 ($t_0 = 0$) : $y_1 = 0.8 \times 1 + 0.1 \sin(0) = 0.8$.
Itération 2 ($t_1 = 0.1$) : $y_2 = 0.8 \times 0.8 + 0.1 \sin(0.1) \simeq 0.64 + 0.00998$.

$$\boxed{y(0.2) \simeq y_2 \simeq 0.65.}$$

2.3 Approximer une EDO par la méthode d'Euler implicite

Méthode.
Le schéma d'Euler implicite remplace l'évaluation de f au point déjà connu (t_n, y_n) par une évaluation au point recherché (t_{n+1}, y_{n+1}) :

$$y_0 = y(t_0), \qquad y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Contrairement au schéma explicite, y_{n+1} apparaît des deux côtés de l'équation : il faut donc résoudre cette équation implicite en y_{n+1} (algébriquement si f est linéaire en y, sinon par Newton ou dichotomie). La méthode est aussi d'ordre 1, mais inconditionnellement stable dès que $\dfrac{\partial f}{\partial y} < 0$.

Exemple.
On considère $y'(t) = y(t) + t$, $y(0) = 1$.

1. Trouver l'approximation y_{exp} de $y(1.5)$ par Euler explicite avec $h = 0.5$.
2. Trouver l'approximation y_{imp} de $y(1.5)$ par Euler implicite avec $h = 0.5$.
3. Vérifier que $y(t) = -1 - t + 2e^t$ est solution exacte, et comparer les erreurs.

Solution.
Ici $f(t, y) = y + t$, et $h = 0.5$ nécessite 3 pas pour atteindre $t = 1.5$ depuis $t_0 = 0$.

1. Euler explicite. $y_{n+1} = y_n + 0.5(y_n + t_n) = 1.5\, y_n + 0.5\, t_n$.

$$y_1 = 1.5, \qquad y_2 = 1.5 \times 1.5 + 0.5 \times 0.5 = 2.5, \qquad y_3 = 1.5 \times 2.5 + 0.5 \times 1 = \boxed{4.25.}$$

2. Euler implicite. L'équation $y_{n+1} = y_n + 0.5(y_{n+1} + t_{n+1})$ donne $0.5\, y_{n+1} = y_n + 0.5\, t_{n+1}$, soit

$$y_{n+1} = 2y_n + t_{n+1}.$$

$$y_1 = 2 \times 1 + 0.5 = 2.5, \qquad y_2 = 2 \times 2.5 + 1 = 6, \qquad y_3 = 2 \times 6 + 1.5 = \boxed{13.5.}$$

3. Vérification et comparaison. On a $y(0) = -1 - 0 + 2 = 1$ et $y'(t) = -1 + 2e^t = y(t) + t$: c'est bien la

solution exacte. Numériquement,

$$y(1.5) = -1 - 1.5 + 2e^{1.5} \simeq -2.5 + 8.963 \simeq 6.463.$$

$$E_{\text{exp}} = |4.25 - 6.463| \simeq 2.213, \qquad E_{\text{imp}} = |13.5 - 6.463| \simeq 7.037.$$

Ici, $E_{\text{imp}} > E_{\text{exp}}$.

Remarque. Pourquoi l'implicite est-il moins bon ici ?
La stabilité "inconditionnelle" d'Euler implicite n'est garantie que lorsque $\dfrac{\partial f}{\partial y} < 0$ (solutions qui s'amortissent). Ici $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 > 0$: la solution exacte est croissante, et le schéma implicite y amplifie davantage l'erreur que le schéma explicite (facteur d'amplification $\frac{1}{1-h} = 2$ contre $1 + h = 1.5$ pour $h = 0.5$). Il ne faut donc jamais conclure "implicite $\Rightarrow$ plus précis" sans vérifier le signe de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2.4 Approximer une EDO par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Méthode.
Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

avec

$$K_1 = f(t_n, y_n), \quad K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right), \quad K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = f(t_n+h, y_n+hK_3).$$

Chaque pas nécessite 4 évaluations de f (la méthode est donc 4 fois plus coûteuse qu'Euler), mais elle est d'ordre 4 : l'erreur décroît beaucoup plus vite que pour les méthodes d'Euler.

Exemple.
On reprend $y'(t) = -2y(t) + \sin(t)$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$. En partant de $t_0 = 0$ et en supposant que le schéma RK4 fournit $y_1 \simeq 0.823$, calculer une approximation de $y(0.2)$ avec ce schéma.

Solution.
Ici $f(t, y) = -2y + \sin(t)$. On calcule, avec $t_1 = 0.1$ et $y_1 \simeq 0.823$:

$$K_1 = f(t_1, y_1) = -2(0.823) + \sin(0.1) \simeq -1.546.$$

$$K_2 = f\left(t_1 + 0.05,\ y_1 + 0.05K_1\right) = -2(0.823 - 0.0773) + \sin(0.15) \simeq -1.342.$$

$$K_3 = f\left(t_1 + 0.05,\ y_1 + 0.05K_2\right) = -2(0.823 - 0.0671) + \sin(0.15) \simeq -1.362.$$

$$K_4 = f(t_1 + 0.1,\ y_1 + 0.1K_3) = -2(0.823 - 0.1362) + \sin(0.2) \simeq -1.175.$$

On en déduit

$$y_2 = y_1 + \frac{0.1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0.823 + \frac{0.1}{6}(-8.129) \simeq 0.823 - 0.135,$$

$$\boxed{y(0.2) \simeq y_2 \simeq 0.688.}$$

2.5 Comparer la précision de deux schémas numériques à l'aide de la solution exacte

Méthode.
Lorsqu'une solution exacte (ou une approximation de référence très précise) est disponible, on évalue la qualité d'un schéma numérique en calculant l'**erreur absolue** entre la valeur approchée et la valeur exacte au même point :

$$E_{\text{méthode}} = |y_{\text{approché}} - y_{\text{exact}}|.$$

On compare alors ces erreurs entre méthodes en gardant à l'esprit leur **ordre** : Euler (explicite ou implicite) est d'ordre 1 (erreur $\propto h$), tandis que RK4 est d'ordre 4 (erreur $\propto h^4$) pour un même pas $h < 1$, RK4 est donc presque toujours bien plus précis.

Exemple.
Comparer les erreurs commises par Euler explicite et par RK4 pour approcher $y(0.2)$ dans les deux méthodes précédentes, sachant que la solution exacte vaut $y(t) = \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t)$.

Solution.
On calcule $y(0.2) = \frac{6}{5}e^{-0.4} - \frac{1}{5}\cos(0.2) + \frac{2}{5}\sin(0.2) \simeq 0.804 - 0.196 + 0.079 \simeq 0.688.$

Pour Euler explicite ($y_2 \simeq 0.65$) :

$$E_{\text{Euler}} = |0.65 - 0.688| \simeq 3.8 \times 10^{-2}.$$

Pour RK4 ($y_2 \simeq 0.688$) :

$$E_{\text{RK4}} \simeq 0.$$

$$\boxed{E_{\text{RK4}} < E_{\text{Euler}},}$$

conformément à ce qu'on attend d'une méthode d'ordre 4 comparée à une méthode d'ordre 1.

2.6 Transformer une équation (ou un système) d'ordre supérieur en système du 1er ordre

Méthode.
Une équation d'ordre n se ramène toujours à un **système** de n équations du 1er ordre. Pour une équation du 2nd ordre $y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$ par exemple, on pose

$$y_1(t) = y(t), \qquad y_2(t) = y'(t),$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = f(t, y_1(t), y_2(t)) \end{cases}$$

On peut ensuite appliquer n'importe quel schéma (Euler, RK4...) à ce système, en l'écrivant composante par composante : pour Euler explicite,

$$Y_{n+1} = Y_n + h\,F(t_n, Y_n), \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} y_1^{n+1} = y_1^n + h\,y_2^n \\ y_2^{n+1} = y_2^n + h\,f(t_n, y_1^n, y_2^n) \end{cases}$$

Exemple. Application n°1
On rappelle l'équation différentielle dont la solution $v(t)$ est le potentiel aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC ouvert, sans générateur de tension :

$$LC\,v''(t) + RC\,v'(t) + v(t) = 0.$$

Transformer cette équation du 2nd ordre en un système d'équations différentielles du 1er ordre.

Solution.
On isole la dérivée d'ordre le plus élevé :

$$v''(t) = -\frac{1}{LC}v(t) - \frac{R}{L}v'(t).$$

On pose $y_1(t) = v(t)$ et $y_2(t) = v'(t)$, d'où $y_1'(t) = y_2(t)$ et $y_2'(t) = v''(t)$. Le système recherché est donc

$$\boxed{\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -\dfrac{1}{LC}y_1(t) - \dfrac{R}{L}y_2(t) \end{cases}}$$

Exemple. Application n°2
Deux espèces animales partagent les mêmes ressources. Leurs populations $y_1(t)$ (espèce A) et $y_2(t)$ (espèce B) suivent le système

$$\begin{cases} y_1'(t) = 0.8y_1(t) - 0.6y_2(t) \\ y_2'(t) = -0.4y_1(t) + 0.5y_2(t) \end{cases}$$

1. Interpréter les termes $0.8y_1(t)$, $0.5y_2(t)$, puis $-0.6y_2(t)$ et $-0.4y_1(t)$.
2. Écrire le schéma d'Euler explicite associé, et effectuer une itération pour $y_1^0 = 5$, $y_2^0 = 2$, $T = 1$, $N = 4$.

Solution.
1. Interprétation. Les termes $0.8y_1$ et $0.5y_2$ traduisent la **croissance naturelle** de chaque espèce (proportionnelle à sa propre population), tandis que $-0.6y_2$ et $-0.4y_1$ sont **négatifs** et freinent chaque population proportionnellement à celle de l'autre espèce : ils traduisent une situation de **compétition** pour les mêmes ressources.

2. Schéma d'Euler et itération. Avec $h = T/N = 1/4 = 0.25$:

$$\begin{cases} y_1^{n+1} = y_1^n + h(0.8y_1^n - 0.6y_2^n) \\ y_2^{n+1} = y_2^n + h(-0.4y_1^n + 0.5y_2^n) \end{cases}$$

En partant de $y_1^0 = 5$, $y_2^0 = 2$:

$$y_1^1 = 5 + 0.25(0.8 \times 5 - 0.6 \times 2) = 5 + 0.25 \times 2.8 = \boxed{5.7,}$$

$$y_2^1 = 2 + 0.25(-0.4 \times 5 + 0.5 \times 2) = 2 + 0.25 \times (-1) = \boxed{1.75.}$$

Récap.
Euler explicite : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, ordre 1, stable si $\partial f/\partial y < 0$ et $h < 2/|\partial f/\partial y|$.
Euler implicite : $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$, ordre 1, inconditionnellement stable si $\partial f/\partial y < 0$.
RK4 : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$, ordre 4.
Transformation d'ordre n : poser $y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots$ pour obtenir un système du 1er ordre sur $\mathbb{R}^n$.

Récap. Autres schémas classiques (formulaire, non vus en annale)

Crank-Nicolson (implicite, ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\big]$.

Heun (explicite, ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))\big]$.

Euler amélioré / point milieu (ordre 2) : $y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$.

3 Interpolation polynomiale

Acquis d'Apprentissage.

- Déterminer le polynôme d'interpolation d'une fonction par la base de Lagrange et par la méthode des différences divisées (base de Newton).
- Majorer l'erreur commise par un polynôme d'interpolation.
- Construire une formule de quadrature en intégrant un polynôme d'interpolation.

3.1 Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange

Méthode.
Étant donné $n+1$ points distincts (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, on construit pour chaque i le polynôme de base de Lagrange

$$l_i(x) = \prod_{0 \le j \ne i \le n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

qui vérifie $l_i(x_i) = 1$ et $l_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$. Le polynôme d'interpolation s'écrit alors directement, sans aucun système à résoudre :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x).$$

C'est l'unique polynôme de degré $\le n$ vérifiant $p(x_i) = y_i$ pour tout i.

Exemple.
Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P_3 d'une fonction f de classe C^4 aux points

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1.$$

Solution.
On calcule chacun des quatre polynômes de base. Par exemple,

$$l_0(x) = \frac{(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)}{(0-\frac{1}{3})(0-\frac{2}{3})(0-1)} = \frac{(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)}{-\frac{2}{9}} = -\frac{9}{2}\Big(x-\frac{1}{3}\Big)\Big(x-\frac{2}{3}\Big)(x-1).$$

De la même façon :

$$l_1(x) = \frac{27}{2}\,x\Big(x-\frac{2}{3}\Big)(x-1), \qquad l_2(x) = -\frac{27}{2}\,x\Big(x-\frac{1}{3}\Big)(x-1), \qquad l_3(x) = \frac{9}{2}\,x\Big(x-\frac{1}{3}\Big)\Big(x-\frac{2}{3}\Big).$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange recherché est donc

$$\boxed{P_3(x) = f(0)\,l_0(x) + f\Big(\frac{1}{3}\Big)l_1(x) + f\Big(\frac{2}{3}\Big)l_2(x) + f(1)\,l_3(x).}$$

3.2 Construire un polynôme d'interpolation par la méthode des différences divisées

Méthode.
On construit le polynôme d'interpolation de façon **incrémentale** : si $p_{0\cdots(k-1)}$ interpole déjà f aux k premiers nœuds, on pose

$$p_{0\cdots k}(x) = p_{0\cdots(k-1)}(x) + a_k(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}),$$

où a_k est la **différence divisée d'ordre** k, notée $[x_0,\dots,x_k]$, définie par récurrence :

$$[x_i] = y_i, \qquad [x_i,\dots,x_{i+k}] = \frac{[x_{i+1},\dots,x_{i+k}] - [x_i,\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}.$$

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n s'écrit alors

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0,\dots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j).$$

Avantage par rapport à Lagrange : si l'on ajoute un nœud supplémentaire pour passer au degré $n+1$, il suffit de calculer le terme a_{n+1} — toute la construction précédente reste valable.

Propriété. Linéarité de l'interpolation
Si P et Q sont les polynômes d'interpolation de deux fonctions F et G aux mêmes points $x_0,\dots,x_n$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $\lambda P + Q$ est le polynôme d'interpolation de $\lambda F + G$ à ces mêmes points.

Exemple.
Soit f la fonction définie par le tableau

x_i	0	$1/2$	1	$3/2$
$f(x_i)$	1	3	8	16

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton de f aux points x_i, $i = 0,1,2,3$.
2. En déduire le polynôme d'interpolation de la fonction $g(x) = 3f(x) + x^2$ aux mêmes points.

Solution.
1. Différences divisées. On calcule successivement :

$$[x_0,x_1] = \frac{3-1}{0.5-0} = 4, \qquad [x_1,x_2] = \frac{8-3}{1-0.5} = 10, \qquad [x_2,x_3] = \frac{16-8}{1.5-1} = 16,$$

$$[x_0,x_1,x_2] = \frac{10-4}{1-0} = 6, \qquad [x_1,x_2,x_3] = \frac{16-10}{1.5-0.5} = 6,$$

$$[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{6-6}{1.5-0} = 0.$$

Le polynôme de Newton est donc

$$P_3(x) = 1 + 4x + 6x\Big(x-\frac{1}{2}\Big) + 0 = 1 + 4x + 6x^2 - 3x,$$

$$\boxed{P_3(x) = 6x^2 + x + 1.}$$

On remarque que, bien qu'on dispose de 4 points, la différence divisée d'ordre 3 est nulle : les données sont en réalité exactement celles d'un polynôme de degré 2.

2. Interpolation de g. Par la propriété de linéarité, le polynôme d'interpolation de $g = 3f + x^2$ aux mêmes points x_i est $3P_3(x) + x^2$ (la fonction $x \mapsto x^2$ étant son propre polynôme d'interpolation de degré ≤ 3 en tout point) :

$$\boxed{3(6x^2 + x + 1) + x^2 = 19x^2 + 3x + 3.}$$

3.3 Majorer l'erreur d'interpolation

Méthode.
Soit $f \in C^{n+1}[a,b]$ et P son polynôme d'interpolation aux $n+1$ points distincts $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$. L'erreur $E(x) = f(x) - P(x)$ vérifie

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \, \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

pour un certain ξ dans le plus petit intervalle contenant $x_0, \dots, x_n$ et x. En notant $M = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$, on en déduit

1. une majoration **précise**, en étudiant directement le maximum de $|(x - x_0) \cdots (x - x_n)|$ sur $[a,b]$;
2. une majoration **générique** (moins fine mais plus rapide), valable lorsque les points sont **équidistants** de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\forall x \in [a,b], \quad |E(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} h^{n+1} M.$$

Exemple.
Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction suffisamment dérivable telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, et soit M un majorant de $|f^{(3)}|$ sur $[0,2]$.

1. Calculer le polynôme d'interpolation P de degré ≤ 2 de f aux points $0, 1, 2$.
2. Montrer que $|E(x)| \leq \dfrac{M}{6} |x(x-1)(x-2)|$.
3. En quel(s) point(s) de $[0,2]$ ce majorant est-il maximal, et quelle est la valeur de ce maximum ?
4. En déduire une majoration de $|E(x)|$ sur $[0,2]$, et la comparer à celle donnée par la formule équidistante.

Solution.
1. Polynôme d'interpolation. Les différences divisées donnent $[x_0, x_1] = \dfrac{2-1}{1-0} = 1$, $[x_1, x_2] = \dfrac{5-2}{2-1} = 3$, $[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{3-1}{2-0} = 1$, donc

$$P(x) = 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x(x-1) = \boxed{x^2 + 1.}$$

2. Majoration. Avec $n = 2$, la formule générale donne $E(x) = x(x-1)(x-2)\dfrac{f'''(\xi)}{3!}$, d'où immédiatement

$$|E(x)| \leq \frac{M}{6} |x(x-1)(x-2)|.$$

3. Maximum de $h(x) = x(x-1)(x-2)$ sur $[0,2]$. On a $h'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, qui s'annule en

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Par symétrie de h autour de $x = 1$, ces deux points donnent la même valeur absolue :

$$\left| h\Big(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\Big) \right| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \simeq 0.385,$$

qui est bien supérieure aux valeurs aux bords ($h(0) = h(2) = 0$). Donc $\max_{[0,2]} |h(x)| = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

4. Majoration finale et comparaison. On obtient

$$|E(x)| \leq \frac{M}{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{27} M \simeq 0.0641\, M.}$$

La formule équidistante (avec $n = 2$, $h = 1$) donnerait quant à elle $|E(x)| \leq \dfrac{1}{4 \times 3} \times 1^3 \times M = \dfrac{M}{12} \simeq 0.0833\, M$: la majoration obtenue au point 3 en étudiant directement $\max |h(x)|$ est donc plus fine que la majoration générique.

3.4 Construire une formule de quadrature à partir d'un polynôme d'interpolation

Méthode.

Pour approcher $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, on remplace f par son polynôme d'interpolation de Lagrange $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$ aux points $x_0, \dots, x_n$, et on intègre terme à terme :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x)\,dx}_{w_i}.$$

On obtient ainsi une **formule de quadrature** $\sum_i w_i f(x_i)$, où les poids w_i ne dépendent que du choix des points (jamais de f) : c'est exactement le principe sur lequel reposent les méthodes des trapèzes et de Simpson du chapitre suivant.

Exemple.

On reprend les points $x_0 = 0,\ x_1 = \dfrac{1}{3},\ x_2 = \dfrac{2}{3},\ x_3 = 1$ et les polynômes de Lagrange associés (méthode précédente).

1. En intégrant P_3 sur $[0,1]$, montrer que
$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{8}\Big[f(0) + 3f\Big(\frac{1}{3}\Big) + 3f\Big(\frac{2}{3}\Big) + f(1)\Big].$$
2. En déduire une approximation de $\ln(2)$.

Solution.

1. Calcul des poids. On développe $l_0(x) = -\dfrac{9}{2}(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1) = -\dfrac{9}{2}x^3 + 9x^2 - \dfrac{11}{2}x + 1$, donc

$$w_0 = \int_0^1 l_0(x)\,dx = -\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4} + 9\cdot\frac{1}{3} - \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1 = -\frac{9}{8} + 3 - \frac{11}{4} + 1 = \frac{1}{8}.$$

De même, $l_1(x) = \dfrac{27}{2}x^3 - \dfrac{45}{2}x^2 + 9x$, donc

$$w_1 = \int_0^1 l_1(x)\,dx = \frac{27}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{45}{2}\cdot\frac{1}{3} + 9\cdot\frac{1}{2} = \frac{27}{8} - \frac{15}{2} + \frac{9}{2} = \frac{3}{8}.$$

Les points x_0, x_1, x_2, x_3 étant symétriques par rapport à $\dfrac{1}{2}$ (le changement $x \mapsto 1-x$ échange $x_0 \leftrightarrow x_3$ et $x_1 \leftrightarrow x_2$), on a directement $w_3 = w_0 = \dfrac{1}{8}$ et $w_2 = w_1 = \dfrac{3}{8}$. On retrouve bien

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{8}\Big[f(0) + 3f\Big(\frac{1}{3}\Big) + 3f\Big(\frac{2}{3}\Big) + f(1)\Big].}$$

2. Application à $\ln(2)$. On utilise $\ln(2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ et on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, d'où $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{3}{4}$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{3}{5}$, $f(1) = \frac{1}{2}$. La formule donne

$$\ln(2) \approx \frac{1}{8}\Big(1 + 3\times\frac{3}{4} + 3\times\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{8}(1 + 2.25 + 1.8 + 0.5) = \frac{5.55}{8},$$

$$\boxed{\ln(2) \approx 0.694.}$$

Récap.

Lagrange : $p(x) = \displaystyle\sum_i y_i l_i(x)$, $l_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Newton (différences divisées) : $p(x) = \sum_i [x_0, \ldots, x_i] \prod_{j<i} (x - x_j)$, avec $[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \dfrac{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - [x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$.

Erreur d'interpolation : $E(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, majoration équidistante $|E(x)| \leq \dfrac{h^{n+1}}{4(n+1)} M$.

Formule de quadrature : $w_i = \displaystyle\int_a^b l_i(x)\, dx$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_i w_i f(x_i)$.

4 Intégration numérique

Acquis d'Apprentissage.

- Calculer une intégrale double sur $\mathbb{R}^2$ par passage en coordonnées polaires.
- Approximer une intégrale par les méthodes des trapèzes et de Simpson composées.
- Majorer rigoureusement l'erreur de ces méthodes en étudiant une dérivée d'ordre supérieur.
- Relier l'ordre d'une méthode de quadrature à l'effet d'une réduction du pas sur l'erreur.

4.1 Calculer une intégrale double sur $\mathbb{R}^2$ par passage en coordonnées polaires (cas gaussien)

Méthode.
Pour calculer une intégrale double de la forme $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x^2+y^2)\,dx\,dy$, on effectue le changement de variables polaire

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta,$$

avec $r \in [0, +\infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. L'intégrale double se transforme alors en un produit (ou une intégrale itérée simple) d'intégrales à une variable, généralement bien plus faciles à calculer.

Exemple.
Montrer, en utilisant un passage en coordonnées polaires, que

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi.$$

Solution.
On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, d'où $x^2+y^2 = r^2$ et $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$. Ainsi,

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} r\,e^{-r^2}\,dr\,d\theta.$$

L'intégrale en r se calcule directement, en reconnaissant la dérivée de $-\frac{1}{2}e^{-r^2}$:

$$\int_0^{+\infty} r\,e^{-r^2}\,dr = \Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\times 2\pi = \boxed{\pi.}$$

Remarque. Pourquoi passer par les coordonnées polaires ?
Cette intégrale gaussienne $I = \pi$ permet en pratique d'approcher π numériquement : en remarquant que $I = J^2$ où $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, on peut approcher J (donc π) en tronquant l'intégrale sur un intervalle borné, puis en lui appliquant une méthode de quadrature — c'est l'objet des méthodes suivantes.

4.2 Approximer une intégrale par la méthode des trapèzes composée

Méthode.
On subdivise $[a,b]$ en n sous-intervalles de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$, aux points $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$. Sur chaque sous-intervalle, on approche f par le segment joignant $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ (polynôme de Lagrange de degré 1), ce qui donne la formule composée

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_h(f) = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2\big(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\big) + f(x_n)\Big).$$

C'est une méthode de type fermé (les bornes a, b sont utilisées), valable pour tout $n \geq 1$.

Propriété. Analyse de l'erreur
Si $f \in C^2([a,b])$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que

$$I - T_h(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi), \qquad \text{donc} \qquad |I - T_h(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup_{[a,b]}|f''|.$$

La méthode des trapèzes est de **degré (ordre) 1** : elle intègre exactement tout polynôme de degré 1, mais pas de degré 2.

Exemple.
On souhaite approcher numériquement $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ en la subdivisant en $N = 4$ sous-intervalles. Approcher J par la méthode des trapèzes.

Solution.
Avec $N = 4$ et $h = \dfrac{1-(-1)}{4} = \dfrac{1}{2}$, les points de subdivision sont

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1,$$

et les valeurs de $f(x) = e^{-x^2}$ associées :

$$f(x_0) = f(x_4) = e^{-1} \simeq 0.3679, \qquad f(x_1) = f(x_3) = e^{-1/4} \simeq 0.7788, \qquad f(x_2) = 1.$$

La formule des trapèzes donne

$$T_{1/2}(f) = \frac{0.5}{2}\Big[f(x_0) + f(x_4) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big)\Big] = 0.25\big[0.7358 + 5.1152\big],$$

$$\boxed{J \approx T_{1/2}(f) \simeq 1.463.}$$

4.3 Approximer une intégrale par la méthode de Simpson composée

Méthode.
Cette méthode est de type fermé et s'applique seulement quand le nombre de sous-intervalles n est **pair**, $n = 2m$. Sur chaque double sous-intervalle $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, on approche f par son polynôme de Lagrange de degré 2 passant par $x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}$, ce qui donne la formule composée

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_h(f) = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \cdots\big) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \cdots\big) + f(x_n)\Big).$$

Propriété. Analyse de l'erreur
Si $f \in C^4([a,b])$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que

$$I - S_h(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \qquad \text{donc} \qquad |I - S_h(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|.$$

Bien qu'elle utilise un polynôme de degré 2, la méthode de Simpson intègre en réalité exactement tout polynôme de degré ≤ 3 (l'erreur fait intervenir $f^{(4)}$, nulle pour ces polynômes) : elle est de **degré (ordre) 3**.

Exemple.
On reprend $J = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ avec la même subdivision ($N = 4$, $h = \frac{1}{2}$). Approcher J par la méthode de Simpson.

Solution.
Avec les mêmes valeurs $f(x_0) = f(x_4) \simeq 0.3679$, $f(x_1) = f(x_3) \simeq 0.7788$, $f(x_2) = 1$, la formule de Simpson donne

$$S_{1/2}(f) = \frac{0.5}{3}\Big[f(x_0) + f(x_4) + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big) + 2f(x_2)\Big] = \frac{1}{6}\big[0.7358 + 6.2304 + 2\big],$$

$$\boxed{J \approx S_{1/2}(f) \simeq 1.494.}$$

4.4 Majorer l'erreur de la méthode de Simpson

Méthode.
Pour majorer rigoureusement l'erreur de la méthode de Simpson, il faut déterminer $\sup_{[a,b]} |f^{(4)}|$. On procède comme pour toute recherche d'extremum :

1. Calculer $f^{(4)}(x)$, puis $f^{(5)}(x)$ pour repérer les points critiques de $f^{(4)}$.
2. Exploiter les symétries éventuelles (parité) pour réduire l'étude à une moitié de l'intervalle.
3. Comparer la valeur de $|f^{(4)}|$ en chaque point critique et aux bords de l'intervalle : le plus grand de ces nombres est le supremum recherché.
4. Reporter cette valeur dans la formule d'erreur de la méthode de Simpson.

Exemple.
On pose $g(x) = e^{-x^2}$.

1. Montrer que $\max_{x \in [-1,1]} |g^{(4)}(x)| = 12$.
2. En déduire une majoration de l'erreur de la méthode de Simpson appliquée à $J = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ avec $h = \frac{1}{2}$.

Solution.
1. Calcul des dérivées successives. On calcule

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad g''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}, \quad g'''(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2},$$

$$g^{(4)}(x) = \big(16x^4 - 48x^2 + 12\big)e^{-x^2}.$$

La fonction $g^{(4)}$ est paire : il suffit de l'étudier sur $[0,1]$. On dérive une fois de plus :

$$g^{(5)}(x) = -8x\big(4x^4 - 20x^2 + 15\big)e^{-x^2}.$$

Les points critiques de $g^{(4)}$ sur $[0,1]$ vérifient $x = 0$ ou $4x^4 - 20x^2 + 15 = 0$. En posant $X = x^2$, on résout

$4X^2 - 20X + 15 = 0$, de racines $X = \dfrac{5 \pm \sqrt{10}}{2}$. Seule

$$X = \frac{5 - \sqrt{10}}{2} \simeq 0.919, \qquad \text{soit} \qquad x \simeq 0.959$$

appartient à $[0, 1]$ (l'autre racine donne $X \simeq 4.08$, hors de $[0, 1]$).

On compare alors $|g^{(4)}|$ aux trois points candidats :

$$|g^{(4)}(0)| = 12, \qquad |g^{(4)}(0.959)| \simeq 7.41, \qquad |g^{(4)}(1)| \simeq 7.36.$$

Le maximum est donc atteint en $x = 0$:

$$\boxed{\max_{[-1,1]} |g^{(4)}(x)| = |g^{(4)}(0)| = 12.}$$

2. Majoration de l'erreur. Avec $a = -1$, $b = 1$, $h = \dfrac{1}{2}$:

$$|E_{\text{Simpson}}| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{[-1,1]} |g^{(4)}| = \frac{2}{180} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 12 = \frac{2 \times 12}{180 \times 16},$$

$$\boxed{|E_{\text{Simpson}}| \leq \frac{1}{120} \simeq 8 \times 10^{-3}.}$$

4.5 Établir l'ordre d'une méthode de quadrature et en déduire l'effet d'une réduction du pas

Méthode.
L'**ordre** (ou degré de précision) d'une méthode de quadrature se lit directement sur sa formule d'erreur : si

$$|I - Q_h(f)| \leq C\, h^p \sup |f^{(p)}|,$$

alors la méthode est exacte sur tout polynôme de degré $< p$ (puisque sa dérivée d'ordre p est identiquement nulle), et son erreur est en $O(h^p)$. Diviser le pas h par un facteur λ divise alors l'erreur (asymptotiquement) par λ^p.

Exemple.

1. Rappeler la formule d'erreur de la méthode des trapèzes et celle de Simpson. En utilisant la formule de Simpson, démontrer que cette méthode permet d'intégrer exactement tout polynôme de degré 3.
2. En passant de $h = 1$ à $h = 0.5$, l'erreur de la méthode des trapèzes est-elle divisée par combien ? Et celle de la méthode de Simpson ?

Solution.
1. Rappel des formules et exactitude de Simpson sur les polynômes de degré 3. On a

$$I - T_h(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \qquad I - S_h(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi).$$

Si $f = p$ est un polynôme de degré ≤ 3, alors $p^{(4)} \equiv 0$ sur $[a, b]$ tout entier. La formule d'erreur de Simpson donne alors, pour tout $\xi \in [a, b]$,

$$I - S_h(p) = -\frac{b-a}{180} h^4 \times 0 = 0,$$

donc $S_h(p) = I$ exactement : la méthode de Simpson intègre exactement tout polynôme de degré ≤ 3, malgré le fait qu'elle soit construite à partir d'un polynôme d'interpolation de degré seulement 2.

2. Effet de la division du pas par 2. L'erreur des trapèzes est proportionnelle à h^2 : en passant de

$h = 1$ à $h = 0.5$,

$$\frac{E(h=1)}{E(h=0.5)} = \frac{1^2}{0.5^2} = \boxed{4,}$$

donc l'erreur des trapèzes est divisée par 4. L'erreur de Simpson est, elle, proportionnelle à h^4 :

$$\frac{E(h=1)}{E(h=0.5)} = \frac{1^4}{0.5^4} = \boxed{16,}$$

donc l'erreur de Simpson est divisée par 16 — bien plus sensible à une réduction du pas, conséquence directe de son ordre plus élevé.

Récap.
Coordonnées polaires : $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.
Trapèzes : $T_h(f) = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\big)$, erreur en $O(h^2)$, degré 1.
Simpson : $S_h(f) = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4\sum_{\text{impair}} f(x_k) + 2\sum_{\text{pair}} f(x_k) + f(x_n)\big)$, erreur en $O(h^4)$, degré 3 (n pair obligatoire).
Effet d'une division du pas par λ : erreur divisée par λ^2 (trapèzes) ou λ^4 (Simpson).

Récap. Formulaire complémentaire (non vu en annale)

Méthode du point milieu (type ouvert, $n = 2m$ pair) : $M_h(f) = \sum_{k=0}^{m-1} 2h\, f(x_{2k+1})$, degré 1, erreur en $\frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$.
Relations de comparaison : $T_h(f) = \frac{1}{2}\big(T_{2h}(f) + M_h(f)\big)$ et $S_h(f) = \frac{2M_h(f) + T_{2h}(f)}{3}$.