

Fiche Méthodes - SM201

Un recueil de méthodes pour accompagner les révisions d'Analyse 2

DORYAN DENIS

Table des matières

1	Équations différentielles	2
1.1	Résoudre des équations différentielles du premier ordre	2
1.1.1	Résoudre des équations différentielles homogènes	2
1.1.2	Utiliser la méthode de variation de la constante	2
1.1.3	Utiliser la méthode de superposition	3
1.2	Résoudre des équations différentielles du second ordre	5
1.2.1	Résoudre des équations du second ordre linéaires homogènes à coefficients constants	5
1.2.2	Résoudre des équations du second ordre linéaires à coefficients constants avec second membre	6
2	Intégrales généralisées	7
2.1	Déterminer la convergence et la valeur d'une intégrale généralisée	7
2.2	Utiliser le cas spécial des intégrales de Riemann	8
2.3	Utiliser les critères de convergence pour les intégrales d'une fonction positive	9
2.3.1	Appliquer le critère de l'équivalence	9
2.3.2	Appliquer le critère de comparaison	10
2.3.3	Appliquer le critère de négligeabilité	11
2.4	Utiliser la convergence absolue	11
3	Séries numériques	12
3.1	Étudier la convergence d'une série numérique	12
3.1.1	Utiliser les séries de Riemann	12
3.1.2	Utiliser les critères d'équivalence et de comparaison pour $u_n \geq 0$	12
3.1.3	Utiliser la convergence absolue pour u_n non positive	13
3.1.4	Utiliser le critère de Leibnitz pour les séries alternées	13
3.1.5	Utiliser la règle de D'Alembert pour les séries avec factorielles, puissance n sur un membre	14
3.1.6	Utiliser la règle de Cauchy pour les séries de la forme $(u_n)^n$	14
3.2	Calculer le résultat d'une série numérique	15
3.2.1	Utiliser les séries télescopiques	15
3.2.2	Utiliser les séries exponentielles	16
3.2.3	Utiliser les séries géométriques et ses dérivées	17
4	Introduction aux séries de Fourier	18
4.1	Déterminer les coefficients trigonométriques de Fourier	18
4.2	Étudier la convergence d'une série de Fourier	19
4.3	Déduire le résultat de sommes particulières à partir de la forme de Fourier	20

1 Équations différentielles

1.1 Résoudre des équations différentielles du premier ordre

1.1.1 Résoudre des équations différentielles homogènes

Méthode

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation différentielle $(H) : y' + ay = 0$. Les solutions de (H) sont les fonctions f définies sur I par : $f(t) = Ce^{-A(t)}$ où A désigne une primitive sur I de la fonction a et C est une constante. Si a est une constante, alors $f(t) = Ce^{-at}$.

Exemple d'application

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy' - 2y = 0$$

Transformons légèrement l'expression pour retrouver la forme d'une équation différentielle homogène :

$$xy' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = 0 \text{ si } x \neq 0$$

Désormais, l'on a une forme homogène et pouvons en déduire que cette équation a pour solution $y(x) = C.e^{-A(x)}$ où C est une constante. De plus, on a :

$$A(x) = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \ln |x| + cte$$

Ainsi, on a $y(x) = C.e^{-(2 \ln |x|)} = C.e^{\ln(x^2)} = \boxed{C.x^2}$ où C est une constante.

1.1.2 Utiliser la méthode de variation de la constante

Méthode

On cherche désormais à résoudre les équations différentielles de la forme $(E) : y' + ay = b$ où $b \neq 0$, c'est-à-dire trouver les solutions sous la forme $f(t) = Ce^{-A(t)}$ comme introduit précédemment. Ces solutions sont égales à une solution quelconque de l'équation homogène associée $(H) : y' + ay = 0$ à laquelle on ajoute une solution particulière de l'équation (E) . Pour cela, on applique la démarche suivante (il s'agira de la même pour la méthode de superposition) :

1. On cherche la solution à l'équation différentielle homogène associée en utilisant la méthode précédente.
2. Puis l'on vient chercher une solution particulière à partir de la solution homogène : $y_H(t) = Ce^{-A(t)}$ devient $y_P(t) = C(t)e^{-A(t)}$. On en déduit que $y'_P(t) = C'(t)e^{-A(t)} - C(t)A'(t)e^{-A(t)}$.
3. Le but est désormais de trouver l'expression de la fonction $C(t)$. Pour cela, on remplace les termes de notre équation différentielle de départ par leurs expressions que l'on vient de déterminer. On obtient l'équation suivante à résoudre :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ &\Leftrightarrow [C'(t)e^{-A(t)} - C(t)A'(t)e^{-A(t)}] + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow C'(t)e^{-A(t)} - a(t)C(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow C'(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow C'(t) = b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

La fonction C est donc une primitive de la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$.

4. On a désormais la solution de notre équation différentielle : $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$.

Exemple d'application

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + xy = x$$

- On commence par chercher la solution à l'équation homogène associée à (E) . Soit $(H) : y' + xy = 0$. La fonction $a(x) = x$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction A définie par $A(x) = \frac{1}{2}x^2$. Donc les solutions de (H) sont de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_H(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

- On cherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + xf(x) = x \\ &\Leftrightarrow [C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}}] + xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x \\ &\Leftrightarrow C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x \\ &\Leftrightarrow C'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

D'où $C(x) = \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx$, c'est-à-dire $C(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + k$ où $k = cte$ (mais k est inutile).

Finalement $y_P(x) = e^{\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$ donc $y_P(x) = 1$ est une solution particulière de (E) .

$$\text{Donc } f(x) = (e^{\frac{x^2}{2}} + k)e^{-\frac{x^2}{2}} = \boxed{ke^{-\frac{x^2}{2}} + 1}$$

1.1.3 Utiliser la méthode de superposition

Méthode

La méthode précédente fonctionne pour toutes les équations de cette forme, mais l'intégration à effectuer lors de la troisième étape peut parfois s'avérer fastidieuse. Il existe une manière plus rapide pour résoudre certaines équations différentielles de la forme $(E) : y' + ay = b$ où $b \neq 0$. Nous allons utiliser la même démarche globale que celle exposée dans la méthode précédente, mais en utilisant quelques astuces pour simplifier la recherche de la solution particulière.

Notons g une solution particulière de l'équation (E) . Nous allons distinguer plusieurs seconds membres particuliers b sur lesquels la recherche de solution particulière sera plus aisée.

- **Second membre polynomial** : Si $b(x) = P(x)$ où P est un polynôme de degré n
 - Si $a = 0$, $g(x) = xQ(x)$ où Q est un polynôme de degré n
 - Si $a \neq 0$, $g(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme de degré n
- **Second membre trigonométrique** (cosinus et/ou sinus uniquement) : Si $b(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$, alors $g(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
(Même si le second membre contient uniquement le sinus ou le cosinus, il faut prendre la solution particulière en tant que combinaison de sinus et de cosinus)
- **Second membre sous forme d'un produit exponentiel et polynomial** : Si $b(x) = e^{sx}P(x)$ où P est un polynôme de degré n
 - Si $a \neq -s$, alors $g(x) = e^{sx}Q(x)$ où Q est un polynôme de degré n
 - Si $a = -s$, alors $g(x) = e^{sx}xQ(x)$ où Q est un polynôme de degré n

Exemple d'application n°1

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' - 3y = 6x + 1$$

Commençons par trouver la solution de l'équation homogène associée $(H) : y' - 3y = 0$. Les solutions sont de la forme $y_H(x) = Ce^{-A(x)}$ avec $A(x) = \int -3dx = -3x$ donc $y_H(x) = C.e^{3x}$ où C est une constante.

Nous pouvons désormais rechercher une solution particulière g sous la forme $g(x) = ax + b$ avec $b \neq 0$ car $6x + 1$ est un polynôme de degré 1 et $a = -3 \neq 0$.

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) - 3g(x) = 6x + 1 \\ &\Leftrightarrow a - 3(ax + b) = 6x + 1 \\ &\Leftrightarrow a - 3ax - 3b = 6x + 1 \end{aligned}$$

On procède par identification pour déterminer a et b :

$$\begin{cases} -3a = 6 \\ a - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{1-a}{-3} = \frac{1+2}{-3} = -1 \end{cases}$$

Donc $g(x) = -2x - 1$.

Ainsi, les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{3x} - 2x - 1$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exemple d'application n°2

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + y = \sin(2x)$$

Commençons par trouver la solution de l'équation homogène associée $(H) : y' + y = 0$. Les solutions sont de la forme $y_H(x) = Ce^{-A(x)}$ avec $A(x) = \int 1dx = x$ donc $y_H(x) = C.e^{-x}$ où C est une constante.

Nous pouvons désormais rechercher une solution particulière g sous la forme $g(x) = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$ car on a un second membre trigonométrique dans l'équation. On calcule la dérivée de g comme suit : $g'(x) = -2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x)$.

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) + g(x) = \sin(2x) \\ &\Leftrightarrow -2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x) + \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x) = \sin(2x) \\ &\Leftrightarrow \cos(2x)(2\beta + \alpha) + \sin(2x)(-2\alpha + \beta) = \sin(2x) \end{aligned}$$

On procède par identification pour déterminer α et β :

$$\begin{cases} 2\beta + \alpha = 0 \\ -2\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ 4\beta + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{2}{5} \\ \beta = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Donc $g(x) = -\frac{2}{5} \cos(2x) + \frac{1}{5} \sin(2x)$.

Ainsi, les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{-x} - \frac{2}{5} \cos(2x) + \frac{1}{5} \sin(2x)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exemple d'application n°3

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' - 2y = 2xe^{2x}$$

Commençons par trouver la solution de l'équation homogène associée $(H) : y' - 2y = 0$. Les solutions sont de la forme $y_H(x) = Ce^{-A(x)}$ avec $A(x) = \int -2dx = -2x$ donc $y_H(x) = C.e^{2x}$ où C est une constante.

Nous pouvons désormais rechercher une solution particulière g sous la forme $g(x) = xe^{2x} \times (ax + b) = e^{2x}(ax^2 + bx)$ avec $a \neq 0$ car $2x$ est un polynôme de degré 1 et $a = -2 = -s$. On calcule la dérivée de g comme suit : $g'(x) = 2(ax^2 + bx)e^{2x} + (2ax + b)e^{2x} = e^{2x}(2ax^2 + 2bx + 2ax + b)$.

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) - 2g(x) = 2xe^{2x} \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(2ax^2 + x(2b + 2a) + b) - 2e^{2x}(ax^2 + bx) = 2xe^{2x} \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(x(2b + 2a - 2b) + b) = 2xe^{2x} \\ &\Leftrightarrow x(2a) + b = 2x \end{aligned}$$

On procède par identification pour déterminer a et b :

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc $g(x) = xe^{2x} \times x = x^2e^{2x}$.

Ainsi, les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{2x} + x^2e^{2x} = \boxed{e^{2x}(C + x^2)}$ où $C \in \mathbb{R}$.

1.2 Résoudre des équations différentielles du second ordre

1.2.1 Résoudre des équations du second ordre linéaires homogènes à coefficients constants

Méthode

Nous nous intéressons ici aux équations du second ordre linéaires homogènes à coefficients constants, c'est-à-dire les équations de la forme $(H) : ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des réels non nuls avec $a \neq 0$.

Pour résoudre ce type d'équations, on commence par lui associer une équation caractéristique du second degré $(E) : a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. On résout alors cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

- Si $\Delta > 0$, (E) possède deux solutions réelles λ_1 et λ_2 ; les solutions de (H) sont de la forme : $f(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, où A et B sont deux réels.
- Si $\Delta = 0$, (E) possède une unique solution réelle λ_0 ; les solutions de (H) sont de la forme : $f(t) = (At + B)e^{\lambda_0 t}$, où A et B sont deux réels.
- Si $\Delta < 0$, (E) possède deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$; les solutions de (H) sont de la forme : $Ae^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$, où A et φ sont deux réels.

Exemple d'application

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(H) : y'' - 4y' + 3y = 0$$

On associe à l'équation (H) l'équation caractéristique suivante $(E) : \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.

On calcule alors $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ donc (E) possède deux solutions réelles : $\lambda_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $\lambda_2 = \frac{4+2}{2} = 3$

Ainsi, les solutions de (H) sont définies par $\boxed{f(t) = Ae^t + Be^{3t}}$ où A et B sont deux réels.

1.2.2 Résoudre des équations du second ordre linéaires à coefficients constants avec second membre

Méthode

Désormais, si nous souhaitons résoudre des équations du second degré ayant un second membre, c'est-à-dire les équations de la forme $(E) : ay'' + by' + cy = d$, nous allons procéder en trois temps.

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée à (E) en utilisant la méthode précédente.
2. On cherche une solution particulière de (E) et pour cela on distingue 2 cas principaux :
 - **Second membre sous forme d'un produit exponentiel et polynomial** : Si $d(x) = P(x)e^{sx}$ où P est un polynôme de degré n
 - Si s n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors $g(x) = Q(x)e^{sx}$ où Q est un polynôme de degré n
 - Si s est une racine simple de l'équation caractéristique, alors $g(x) = Q(x)e^{sx}$ où Q est un polynôme de degré $n + 1$
 - Si s est racine double de l'équation caractéristique, alors $g(x) = Q(x)e^{sx}$ où Q est un polynôme de degré $n + 2$
 - **Second membre trigonométrique** (cosinus et sinus uniquement) : Si $d(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$, transformer ce second membre sous forme exponentielle en faisant appel aux formules d'Euler et utiliser le cas précédent. Même si le second membre contient uniquement le sinus ou le cosinus, il faut prendre la solution particulière en tant que combinaison de sinus et de cosinus.
3. On obtient les solutions générales de l'équation de départ (E) telles qu'elles soient la somme de la solution homogène et de la solution particulière trouvées.

Exemple d'application

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$$

• Commençons par résoudre l'équation différentielle homogène associée $(H) : y'' - 4y' + 4y = 0$. Pour cela, on passe par l'équation caractéristique $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$. Cette équation admet une unique racine $\lambda = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2$. Ainsi, les solutions de (H) sont définies par $f(t) = (Ax + B)e^{2x}$ où A et B sont deux réels.

• Désormais, trouvons une solution particulière de (E) . On remarque que $s = -2$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière de l'équation est donc sous la forme $g(x) = ae^{-2x}$ et on en déduit $g'(x) = -2ae^{-2x}$ puis $g''(x) = 4ae^{-2x}$. On a :

$$\begin{aligned} g(x) \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow 4ae^{-2x} + 8ae^{-2x} + 4ae^{-2x} = e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow 4a + 8a + 4a = 1 \\ &\Leftrightarrow 16a = 1 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Donc une solution particulière de (E) est $y_P(x) = \frac{1}{16}e^{-2x}$.

• Ainsi, les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme : $f(x) = (Ax + B)e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x}$ où A et B sont des réels.

2 Intégrales généralisées

2.1 Déterminer la convergence et la valeur d'une intégrale généralisée

Méthode

La première méthode pour conclure de la convergence d'une intégrale généralisée est tout simplement de trouver sa valeur.

Pour rappel, une intégrale généralisée est l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle $[a; b[$ (ou respectivement $]a; b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (ou respectivement $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$) et dont les bornes sont a et b .

Nous remplaçons alors la borne non comprise dans l'intervalle de définition de la fonction par un réel t afin de trouver, via les méthodes d'intégration classiques vues au premier semestre, le résultat de cette intégrale en fonction de t .

Nous pouvons, une fois cela fait, conclure de la convergence ou non de l'intégrale de départ en faisant tendre t vers la borne non définie du domaine de définition de la fonction intégrée : si la limite est finie, alors l'intégrale converge et est égale à la valeur de cette limite ; si en revanche ce n'est pas le cas alors l'intégrale diverge.

Remarque

Nous utiliserons cette méthode si l'on nous demande dans l'exercice la valeur de l'intégrale généralisée. Si l'on demande juste la convergence, nous utiliserons d'autres procédés plus rapides (critères de convergence) dans le cas de fonctions à intégrer positives.

Exemple d'application n°1

Déterminer la convergence et, si tel est le cas, le résultat de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \ln(x) dx$$

Tout d'abord, observons les bornes de l'intégrale : nous constatons qu'en 1 il n'y a pas de souci étant donné que $\ln(1)$ est bien défini ; en revanche, en 0 il y a un problème de convergence étant donné que $\ln(0)$ n'est pas défini. La fonction $\ln$ est continue sur l'intervalle $]0; 1]$.

Définissons alors la nouvelle intégrale F telle que $F(t) = \int_t^1 \ln(x) dx$. Trouvons dans un premier temps la résultat de cette intégrale en fonction de t .

Nous allons réaliser une intégration par parties. Posons :

$$\begin{cases} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} \times dx \\ dv = 1 \times dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in]0; 1]; F(t) &= \int_t^1 \ln(x) dx \\ &= [x \ln(x)]_t^1 - \int_t^1 1 dx \\ &= [x \ln(x)]_t^1 - [x]_t^1 \\ &= [x \ln(x) - x]_t^1 \\ &= -1 - t \ln(t) + t \end{aligned}$$

Désormais, pour déterminer la convergence et, si tel est le cas, sa valeur dans le même temps de I , on cherche $I = \lim_{t \rightarrow 0} F(t)$. On a $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln(t) = 0$ par croissances comparées, donc $I = \lim_{t \rightarrow 0} -1 - t \ln(t) + t = -1$ donc l'intégrale I converge et est égale à -1.

Exemple d'application n°2

Calculer l'intégrale suivante (on admet qu'elle converge) :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{(t^2+2t+3)^3} dt$$

On a un problème de convergence en $+\infty$. On note l'intégrale $K = \int_0^x \frac{t+1}{(t^2+2t+3)^3} dt$. Résolvons cette intégrale :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^x \frac{t+1}{(t^2+2t+3)^3} dt \\ &= \int_0^x (t+1)(t^2+2t+3)^{-3} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{2} \times 2 \times (t+1)(t^2+2t+3)^{-3} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(t^2+2t+3)^{-2}}{-2} \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{4} [(t^2+2t+3)^{-2}]_0^x \\ &= -\frac{1}{4} ((x^2+2x+3)^{-2} - 3^{-2}) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I = \lim_{x \rightarrow +\infty} K = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{1}{9} \right) = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{9} \right) = \boxed{\frac{1}{36}}.$$

2.2 Utiliser le cas spécial des intégrales de Riemann

Méthode

Lorsque vous remarquez une fonction à intégrer est définie sur $]0; +\infty[$ par $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (forme de Riemann), alors on peut appliquer la propriété suivante pour conclure sur sa convergence sans calcul :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Remarque

Réciproquement, nous avons aussi les propriétés suivantes qui fonctionnent par déduction :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ diverge} \Leftrightarrow \alpha \leq 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ diverge} \Leftrightarrow \alpha \geq 1$$

Exemple d'application

Étudier la convergence de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

Tout d'abord, nous avons un problème de convergence à chaque borne d'intégration. Nous devons donc scinder en deux l'intégrale en formant une somme. La fonction étant continue en 1, on choisit la somme suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

Nous remarquons que chaque membre de la somme formée est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2$. Étudions la convergence de chacune de ces intégrales.

Pour $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, puisque $\alpha = 2 > 1$ alors on peut directement conclure que cette intégrale converge.

En revanche, pour $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$, puisque $\alpha = 2 \geq 1$ alors cette intégrale diverge entre les bornes d'intégration 0 et 1.

Ainsi, l'intégrale I diverge car un membre de sa somme converge et l'autre diverge (définition du cours).

2.3 Utiliser les critères de convergence pour les intégrales d'une fonction positive

Remarque

Pour appliquer les différents critères présentés ci-dessous, il est nécessaire que les fonctions intégrées soient **positives et continues / continues par morceaux sur l'intervalle $]a; b[$** . Il est conseillé de bien vérifier la positivité et la continuité des fonctions traitées avant de lancer la démarche de recherche avec les critères. Ce sera plus propre sur votre copie si vous le faites et ça prouve que vous pouvez appliquer les critères !

2.3.1 Appliquer le critère de l'équivalence

Méthode

C'est la méthode la plus utilisée pour résoudre des problèmes de convergence. Le premier réflexe à avoir est de chercher des équivalents (vus au premier semestre) dans la fonction à intégrer afin de conclure rapidement de la convergence, le plus fréquemment en retrouvant une forme de Riemann.

Soient f et g deux fonctions continues ou continues par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$ (respectivement $]a; b[$) telles que, au voisinage de la borne non incluse dans l'intervalle, $f \approx g$. Alors les intégrales $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont de même nature (c'est-à-dire que si l'une converge alors l'autre aussi, idem pour la divergence).

Exemple d'application n°1

Étudier la convergence de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$$

Il y a un problème de convergence en l'infini. On pose $u = \frac{1}{t}$ où $\lim_{t \rightarrow +\infty} u = 0$. En 0, $\cos(u) \approx 1 - \frac{u^2}{2}$.

Donc, en l'infini, $\cos\left(\frac{1}{t}\right) \approx 1 - \frac{1}{2t^2}$.

Soit $K = \int_2^{+\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2t^2}\right)\right] dt = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

On remarque une forme de Riemann avec $\alpha > 1$ donc K converge. Ainsi, par équivalents, l'intégrale I converge.

Exemple d'application n°2

Étudier la convergence de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_0^{+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) dx$$

Nous remarquons qu'il y a un problème de convergence en 0 et en $+\infty$. On décompose donc l'intégrale comme suit : $I = I_1 + I_2$ où $I_1 = \int_0^1 x \ln\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) dx$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) dx$.

• Autour de 0

On pose $X = \frac{1}{x^4}$ où $\lim_{x \rightarrow 0} X = +\infty$. En $+\infty$, on a $\frac{1}{X} \ln(1 + X) \underset{+\infty}{\approx} 0$. Donc, en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = 0$. Puisque cette limite est finie, alors I_1 est dite "faussement impropre" donc elle converge.

• Autour de $+\infty$

On a $x \ln\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) \underset{+\infty}{\approx} x \times \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^3}$. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}$ converge car il s'agit d'une forme de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$. Donc l'intégrale I_2 converge par équivalents.

Ainsi, l'intégrale I converge par somme d'intégrales convergentes.

2.3.2 Appliquer le critère de comparaison

Méthode

Ce critère est assez efficace pour certaines fonctions des $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Soient deux fonctions f et g telles que, $\forall t \in]a; b[, f(t) \leq g(t)$. Alors :

- Si $\int_a^b g(t)$ converge, alors $\int_a^b f(t)$ converge également
- Si $\int_a^b f(t)$ diverge, alors $\int_a^b g(t)$ diverge également

Exemple d'application

Étudier la convergence de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{2 + \sin(x)}{x^2} dx$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{2 + \sin(x)}{x^2}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$ car $2 + \sin(x) \geq 1$ et $x^2 \geq 0$. On a :

$$\forall x \in [1; +\infty[, -1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \sin(x) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \leq \frac{2 + \sin(x)}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$$

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge car il s'agit d'une forme de Riemann avec $\alpha > 1$. Donc, par comparaison, l'intégrale I converge.

2.3.3 Appliquer le critère de négligeabilité

Méthode

Si les équivalents ou la comparaison ne nous avancent pas dans notre calcul, alors on peut tenter d'appliquer le critère de négligeabilité. Nous le rencontrons moins souvent mais il est toutefois important de savoir l'utiliser.

Soient f et g deux fonctions continues ou continues par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$ (respectivement $]a; b]$) telles que, au voisinage de la borne non incluse dans l'intervalle, $f = o(g)$. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge également.

Attention ! Si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors on ne peut pas conclure sur la convergence de $\int_a^b f(t)dt$!

Exemple d'application

Étudier la convergence de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

Nous avons un problème de convergence en l'infini. Pour conclure de la convergence de cette intégrale, nous allons essayer de voir si la fonction à intégrer peut être négligeable devant une fonction de Riemann. Pour cela on note $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

● **Autour de $+\infty$**
Il est évident que $\frac{\ln(x)}{1+x^2} < \frac{\ln(x)}{x^2}$. Cherchons alors si $\frac{\ln(x)}{x^2} = o(g(x))$. Supposons que c'est le cas, on aurait alors $\frac{\ln(x)}{x^2} = o(\frac{1}{x^\alpha}) \Rightarrow \ln(x) = o(\frac{x^2}{x^\alpha}) = o(x^{2-\alpha})$.

Prenons $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, alors $\ln(x) = o(x^{2-\frac{3}{2}}) = o(x^{\frac{1}{2}})$. Cela implique que $\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{o(x^{\frac{1}{2}})}{x^2} = o(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$. On retrouve alors une intégrale de Riemann avec $\alpha > 1$ donc cette intégrale converge.

Ainsi, par négligeabilité, l'intégrale I converge.

2.4 Utiliser la convergence absolue

Méthode

Pour certains cas, notamment avec des fonctions trigonométriques, il est utile de passer par la convergence absolue pour conclure de la convergence d'une intégrale généralisée en appliquant les critères précédents.

Soit un intervalle de la forme $[a; b[$, $]a; b]$ ou $]a; b[$, avec a et b éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue ou continue par morceaux sur $]a; b[$. Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge également et est dite absolument convergente.

Exemple d'application

Étudier la convergence de l'intégrale ci-dessous :

$$I = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Nous réalisons un changement de variable. Posons $x = \frac{1}{t}$, d'où $t = \frac{1}{x}$ et $dt = -\frac{dx}{x^2}$. Si $t \rightarrow 0$, alors $x \rightarrow +\infty$. On a :

$$I = - \int_{+\infty}^1 \sin(x) \times \frac{dx}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

On a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $0 \leq |\sin(x)| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. On remarque une forme de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge. Ainsi, par comparaison, l'intégrale I est absolument convergente.
Le passage par la convergence absolue permet d'appliquer la comparaison (fonction intégrée positive).

3 Séries numériques

3.1 Étudier la convergence d'une série numérique

Remarque

Pour étudier la convergence d'une série numérique, il faut maîtriser et savoir appliquer plusieurs techniques, dont certaines qui ressemblent beaucoup sur le principe à celles employées pour les intégrales généralisées. Mais attention à ne pas faire de confusions sur quelles techniques appliquer dans quel cas !

3.1.1 Utiliser les séries de Riemann

Méthode

Ces séries particulières vont beaucoup nous servir une nouvelle fois dans ce chapitre pour étudier la convergence d'une série numérique. Il est donc essentiel de connaître cette règle de convergence.

Soit α un réel ; on appelle série de Riemann la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$.

Une série de Riemann est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Si $\alpha \leq 1$, alors la série diverge.

3.1.2 Utiliser les critères d'équivalence et de comparaison pour $u_n \geq 0$

Méthode

Si l'on se place dans le cas où le terme général u_n de la série que l'on cherche à étudier est positif, alors on peut appliquer les deux critères de convergence suivants.

- Critère d'équivalence

Si $u_n \approx v_n$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont de même nature.

- Critères de comparaison

- Si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

- Si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge.

- Si, en $+\infty$ $u_n = o v_n$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Remarque

Il sera toujours apprécié que vous montriez que le terme général de la série est positif avant d'appliquer l'un de ces critères. Cela permet de vérifier si les conditions sont bien respectées d'après la définition.

Exemple d'application n°1

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)(e^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Montrons d'abord que $u_n \geq 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} > 1$ et $e^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$.
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 \geq n$ donc $0 < \frac{n+1}{n^2+1} \leq 1 \leq \pi$ donc $\sin(\frac{n+1}{n^2+1}) > 0$. On a donc bien $u_n > 0$.

On pose $X = \frac{1}{n}$, si $n \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow 0$. On a $e^X - 1 \underset{0}{\approx} X$ donc $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n}$.

On a également $\frac{n+1}{n^2+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{n}{n^2} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n}$. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc on a $\sin(\frac{n+1}{n^2+1}) \underset{+\infty}{\approx} \sin(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n}$.

Donc $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$. On obtient une forme de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série converge par équivalents.

Exemple d'application n°2

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{2 + \cos(n)}{n^2}$$

On a $2 + \cos(n) \geq 1$ et $n^2 > 0$ donc le terme général $u_n > 0$.

On sait que $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos(n) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{3}{n^2}$.

La somme $\sum \frac{3}{n^2}$ peut s'écrire $3 \sum \frac{1}{n^2}$ et l'on retrouve alors une forme de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Donc $\sum \frac{3}{n^2}$ converge et ainsi la série de terme général u_n converge par comparaison.

3.1.3 Utiliser la convergence absolue pour u_n non positive

Méthode

Si l'on se place dans le cas où le terme général u_n de la série que l'on cherche à étudier n'est pas positif (négatif, alterne entre positif et négatif...), alors on peut appliquer le critère suivant.

On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge. Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Attention ! La réciproque est fausse !

Exemple d'application

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{n+1}{n^2+2n+3} (e^{-\frac{1}{n}} - 1)$$

En $+\infty$, on a $\frac{n+1}{n^2+2n+3} \underset{+\infty}{\approx} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ et $e^{-\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\approx} 1 + (-\frac{1}{n}) - 1 = -\frac{1}{n}$.

Donc $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n} \times -\frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2}$. En passant par la valeur absolue de u_n , on peut appliquer le critère des séries de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc $\sum |u_n|$ converge.

Ainsi, la série de terme général u_n converge absolument.

3.1.4 Utiliser le critère de Leibnitz pour les séries alternées

Méthode

Soit une série alternée de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$.

Si la suite a_n est décroissante et converge vers 0, alors la série de terme général u_n converge.

Exemple d'application

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n e^{-n}$$

La suite $a_n = e^{-n}$ est positive (par définition d'une exponentielle), décroissante (exposant avec un signe négatif) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Ainsi, d'après le critère de Leibnitz, la série de terme général u_n converge.

3.1.5 Utiliser la règle de D'Alembert pour les séries avec factorielles, puissance n sur un membre

Méthode

Cette règle est très efficace si le terme général de la suite étudiée possède des factorielles et/ou une puissance n sur un membre de l'expression de u_n .

Soit $k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$.

- Si $k < 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge
- Si $k > 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge
- Si $k = 1$, alors on ne peut rien conclure sur la convergence de la série

Exemple d'application

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{3n+1}{2^n}$$

Pour conclure sur la convergence de cette série, nous utilisons la règle de D'Alembert.

$$\forall n \geq 0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3n+1} = \frac{3n+4}{2(3n+1)} = \frac{3n+4}{6n+2}$$

En $+\infty$, on a $\frac{3n+4}{6n+2} \underset{+\infty}{\approx} \frac{3n}{6n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ donc la série de terme général u_n converge d'après la règle de D'Alembert.

3.1.6 Utiliser la règle de Cauchy pour les séries de la forme $(u_n)^n$

Méthode

On privilégiera l'utilisation de la règle suivante si le terme général de la série étudiée est de la forme $(u_n)^n$.

Soit $k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

- Si $k < 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge
- Si $k > 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge
- Si $k = 1$, alors on ne peut rien conclure sur la convergence de la série

Exemple d'application

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{-n}$$

Utilisons la règle de Cauchy pour étudier la convergence de cette série.

$$\forall n \geq 0, u_n > 0, \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{-\frac{n}{n}} = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{-1} = \frac{n+1}{2n+1}$$

En $+\infty$, on a $\frac{n+1}{2n+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Cela nous donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$. Ainsi, d'après la règle de Cauchy, la série de terme général u_n converge.

Remarque

Il est fortement possible qu'en essayant d'appliquer le critère de Cauchy sur une forme de terme général qui semble pourtant s'y prêter cela ne vous donne rien. Dans ce cas, il est utile d'utiliser une petite astuce consistant à appliquer la propriété $a^b = e^{b \ln(a)}$ et les équivalents.

Exemple d'application

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}$$

Lorsque l'on applique la règle de Cauchy, on tombe sur une limite égale à 1 ce qui nous empêche de conclure sur la convergence de cette série. Remarquons que $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n} = e^{-n \ln(\cos(\frac{1}{n}))} > 0$.

En $+\infty$, on a $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\approx} 1 - \frac{(\frac{1}{n})^2}{2} = 1 - \frac{1}{2n^2}$ (sur la copie d'examen on justifierait proprement en posant une nouvelle variable comme vu précédemment).

En $+\infty$, on a donc également $\ln(\cos(\frac{1}{n})) \underset{+\infty}{\approx} -\frac{1}{2n^2}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\approx} e^{-n \times (-\frac{1}{2n^2})} = e^{\frac{1}{2n}}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2n}} = e^0 = 1 \neq 0$ donc la série de terme général u_n diverge.

3.2 Calculer le résultat d'une série numérique

Remarque

Si l'on vous demande de calculer le résultat d'une série numérique, alors il faudra vous ramener à l'une des trois formes suivantes de séries, car ce sont les seules vues en cours permettant d'obtenir un résultat.

3.2.1 Utiliser les séries télescopiques

Méthode

Cette technique est très utile lorsque l'on peut réaliser une décomposition en éléments simples du terme général de la série à étudier. Une fois cela fait, l'objectif est de se ramener à une expression contenant plusieurs sommes identiques pouvant s'annuler.

Pour cela, on cherche d'abord à construire des séries contenant le même terme général en utilisant la

linéarité. Cette dernière indique que $\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p-r}^{n-r} a_{k+r}$.

Puis on va chercher à avoir les mêmes bornes sur chacune de ces sommes, pour cela on va prendre comme bornes communes la plus grande pour la borne inférieure et la plus petite pour la borne supérieure. Pour se faire, on isole les termes "en trop" dans les sommes d'origine.

En fin de compte, les sommes identiques s'annulent, ne laissant que les termes isolés dont la somme est facile à calculer grâce aux termes identifiés par la décomposition en éléments simples.

Exemple d'application

On considère le terme général suivant :

$$u_n = \frac{4}{n(n+2)}$$

Calculer le résultat de la série $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_n$.

Commençons par réaliser une décomposition en éléments simples de u_n . On cherche les réels a et b tels que $\frac{4}{n(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}$.

- On multiplie par n et on prend $n = 0$: $a = \frac{4}{0+2} = 2$.
- On multiplie par $n+2$ et on prend $n = -2$: $b = \frac{4}{-2} = -2$.

On a donc $u_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}$.

Ainsi, on peut calculer la somme suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+2} \right) \\&= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+2} \\&= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{2}{k} \\&= \sum_{k=3}^n \frac{2}{k} + 2 + 1 - \left(\sum_{k=3}^n \frac{2}{k} + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} \right) \\&= \sum_{k=3}^n \frac{2}{k} + 3 - \sum_{k=3}^n \frac{2}{k} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \\&= 3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}\end{aligned}$$

Pour calculer le résultat de cette série, on applique simplement la définition.

$$S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \boxed{3} \text{ (car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{)}.$$

3.2.2 Utiliser les séries exponentielles

Méthode

Si vous reconnaissez une série de la forme suivante, alors on peut directement trouver son résultat.

Soit a un réel ; on appelle série exponentielle la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$. Pour tout a réel, la série exponentielle converge et sa somme est égale à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

Exemple d'application

On considère le terme général suivant :

$$u_n = \frac{2n+1}{n!} \times 3^n$$

Calculer le résultat de la série $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On commence par développer la série en somme de deux séries.

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n!} \times 3^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} \times 3^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} = 2S_1 + S_2$$

Calculons le résultat de chacune de ces séries.

- Pour S_2 , on reconnaît la forme d'une série exponentielle avec $a = 3$ donc on peut directement conclure que $S_2 = e^3$.
- Pour S_1 , on va réaliser quelques transformations afin de se ramener à la forme d'une série exponentielle.

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} \times 3^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(n-1)!} = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} = 3e^3$$

Ainsi, on a $S = 2S_1 + S_2 = 2 \times 3e^3 + e^3 = \boxed{7e^3}$.

3.2.3 Utiliser les séries géométriques et ses dérivées

Méthode

Le dernier moyen de trouver le résultat d'une série est de passer par la forme géométrique et ses dérivées. Il faut bien observer la forme de la série à étudier pour rapidement conclure sur quelle méthode utiliser.

On appelle série géométrique de raison q la série de terme général q^n . La série géométrique de raison q converge **si et seulement si** $-1 < q < 1$ et sa somme est alors égale à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Exemple d'application

On considère le terme général suivant :

$$u_n = \frac{3n+1}{2^n}$$

Calculer le résultat de la série $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

On réalise le développement suivant de la série : $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n+1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n}{2^n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = S_1 + S_2$

- Pour S_2 , on remarque que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **Attention !** On ne peut pas appliquer directement le résultat de la série car elle commence à 2, donc on retranche les 2 premiers termes de la série débutant à 0 pour appliquer le résultat : $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

- Pour S_1 , on réalise les transformations nécessaires pour tomber sur une forme dérivée première de la série géométrique :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n}{2^n} = 3 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1} \times 2} = \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 \right) = \frac{9}{2}$$

Ainsi, $S = S_1 + S_2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{5}$.

4 Introduction aux séries de Fourier

Remarque

Les exercices sur les séries de Fourier suivent tous plus ou moins la même démarche de réflexion. Elle consiste en 3 points distincts que nous allons étudier dans cette dernière partie du cours pour mener l'étude de la série jusqu'au bout.

4.1 Déterminer les coefficients trigonométriques de Fourier

Méthode

La première chose à réaliser lors de l'étude d'une série de Fourier est de calculer ses coefficients trigonométriques. Mais même avant cette étape il est largement préférable de réaliser un dessin graphique de la fonction étudiée sur deux périodes afin de bien visualiser le problème (bien prendre en compte la période et la parité de la fonction lors de cette étape !).

Les formules des coefficients trigonométriques de Fourier (à connaître par coeur !) sont :

- $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) dx$

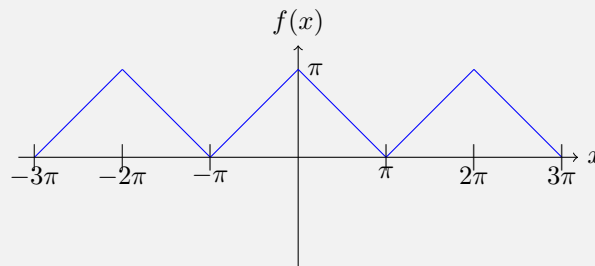
Attention ! Ayez bien en tête les propriétés suivantes avant de vous lancer dans des calculs complexes pouvant s'avérer inutiles :

- Si la fonction de la série est paire, alors pour tout entier n on a $b_n = 0$.
- Si la fonction de la série est impaire, alors pour tout entier n on a $a_n = 0$ et aussi $a_0 = 0$.

Exemple d'application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que $\forall x \in [0; \pi], f(x) = \pi - x$. Déterminer les coefficients des Fourier.

Tout d'abord, représentons graphiquement la fonction f sur $[-3\pi; 3\pi]$:



f étant paire, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$. On a $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

• Calculons dans un premier temps le coefficient a_0 . On prend comme bornes d'intégration $-\pi$ et π car d'après la représentation graphique l'aire à droite de l'axe vertical 0 est égale à l'aire à gauche.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi^2}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

• Calculons le deuxième coefficient trigonométrique.

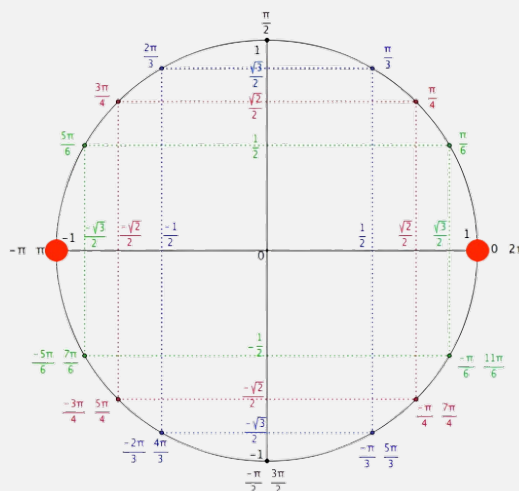
$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \times 2 \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx$$

On réalise une intégration par parties :
$$\begin{cases} u = \pi - x \rightarrow u' = -1 \\ v' = \cos(nx) \rightarrow v = \frac{1}{n} \sin(nx) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } a_n &= \frac{2}{\pi} \left\{ [(\pi - x) \frac{1}{n} \sin(nx)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) dx \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ 0 - \frac{1}{n^2} [\cos(nx)]_0^{\pi} \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{n^2} (\cos(n\pi) - 1) \right\} \\ &= \boxed{-\frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)} \end{aligned}$$

Remarque

Dans l'exemple d'application précédent, on a utilisé le fait que $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Pour expliquer cette relation, on peut utiliser le cercle trigonométrique. En effet, on aura que deux valeurs possibles qui sont $\cos(2\pi) = \cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. On a la représentation suivante sur le cercle trigonométrique :



Ainsi, on remarque bien graphiquement la relation $\cos(n\pi) = (-1)^n$ car la valeur change selon la parité de n .

4.2 Étudier la convergence d'une série de Fourier

Méthode

Pour étudier la convergence d'une série de Fourier, après avoir écrit la série de Fourier à partir des coefficients trouvés, il suffit d'appliquer le théorème de Dirichlet qui est le suivant.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période T , dérivable et de dérivée continue par morceaux. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge et :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

où $f(t+0)$ désigne la limite à droite en 0 de f en t et $f(t-0)$ la limite à gauche.

Exemple d'application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que $\forall x \in [0; \pi], f(x) = \pi - x$. Étudier la convergence de la série de Fourier de f .

La série de Fourier de f s'écrit :

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos(nx)$$

Pour simplifier cette expression, on peut distinguer les deux cas suivants :

- Si $n = 2p$ (pair), alors $a_{2p} = -\frac{2}{\pi n^2} (1 - 1) = 0$
- Si $n = 2p + 1$ (impair), $a_{2p+1} = \frac{4}{\pi (2p+1)^2}$

Donc la série de Fourier s'écrit : $\frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi (2p+1)^2} \cos((2p+1)x)$.

Attention ! Il faut penser à mettre $p = 0$ en borne inférieure car dans la série originale n débute à 1 et comme $n = 2p + 1$ il faut changer la borne pour respecter cette condition.

f est dérivable et de dérivée continue par morceaux (voir le dessin à l'exemple d'application

précédent). Donc la série de Fourier converge et on a : $\frac{\pi}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2} \cos((2p+1)x) = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$
Or, f étant continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.3 Dédire le résultat de sommes particulières à partir de la forme de Fourier

Méthode

Lorsque l'on vous demande de déduire de la série de Fourier les résultat de sommes particulières, vous devez normalement retrouver un élément ressemblant au terme général de ces sommes dans votre forme de Fourier. Une fois ceci analysé, il y a deux moyens de déduire ces sommes :

- Le premier est d'appliquer le théorème de Dirichlet qui a été énoncé à la méthode précédente.
 - Le deuxième est d'appliquer la formule de Parseval, on utilisera ceci lorsque l'on remarque un lien entre l'élément intéressant dans votre forme de Fourier s'il est élevé au carré et le terme général de la série que l'on cherche à calculer.
- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période T , continue par morceaux. On a alors l'égalité suivante :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Exemple d'application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, telle que $\forall x \in [0; \pi], f(x) = \pi - x$.
À partir des résultats précédents, en déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} ; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}$$

- Pour la première somme, appliquons le théorème de Dirichlet en prenant $x = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} &= f(0) = \pi \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} &= \pi - \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} &= \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$.

- Pour la deuxième somme, comme f a pour période 2π et est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue par morceaux, on peut appliquer la formule de Parseval. Calculons d'abord $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi^2 - 2\pi x + x^2) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [\pi^2 x - \pi x^2 + \frac{x^3}{3}]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} (2\pi^3 - 4\pi^3 + \frac{8\pi^3}{3}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{2}{3} \pi^3 \\ &= \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Donc, d'après la formule de Parseval :

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} \times \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^4}{96}$$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}.$