Fiche Méthodes - SM101

Un recueil de méthodes pour accompagner les révisions d'Analyse I

Dorÿan Denis

2025-2026

Table des matières

1

Fonctions réelles d'une variable réelle

Acquis d'Apprentissage.

- La notion de fonction, de domaine de définition, d'ensemble image.
- Les notions de fonction injective, surjective, bijective.
- Les symétries d'une fonction (parité, imparité, périodicité).
- La monotonie et les bornes (inf/sup, min/max) d'une fonction.
- La fonction réciproque (inverse) d'une fonction bijective.

1.1 Déterminer le domaine de définition d'une fonction

Méthode.
Pour déterminer le domaine de définition D_f d'une fonction f, on repère toutes les conditions imposées par les opérations qui composent f :

- un quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ impose $v(x) \neq 0$;
- une racine carrée $\sqrt{u(x)}$ impose $u(x) \geq 0$ (et $u(x) > 0$ si, de plus, cette racine se trouve elle-même au dénominateur d'une fraction) ;
- un logarithme $\ln(u(x))$ impose $u(x) > 0$;
- $\arcsin(u(x))$ ou $\arccos(u(x))$ impose $-1 \leq u(x) \leq 1$.

On résout chaque condition séparément, puis on prend l'**intersection** de toutes les conditions. Si f est définie par morceaux, on applique cette démarche branche par branche (en intersectant chaque condition avec le sous-ensemble où la branche s'applique), puis on **réunit** les morceaux obtenus.

Exemple. Application n°1
Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \arcsin(e^x - 3)$.

Solution.
La fonction $\arcsin$ impose la condition $-1 \leq e^x - 3 \leq 1$, soit $2 \leq e^x \leq 4$. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette double inégalité équivaut à $\ln 2 \leq x \leq \ln 4$. Donc

$$\boxed{D_f = [\ln 2,\ 2\ln 2]}.$$

Exemple. Application n°2 — Annale 2025-2026, Exercice I
Soit f la fonction qui, à tout réel $x \in D_f$, associe :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)}{\sqrt{1 + 4\sin(\pi x)}} & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln(1 + 3x^2) & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1 - \cos(2 - x)}{e^{(2-x)^3} - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Déterminer D_f.

Solution.
On étudie chaque branche séparément.

Sur $]0, 2]$: la quantité $1 + 3x^2$ est toujours strictement positive, donc $x\ln(1 + 3x^2)$ est définie pour tout x : cette branche contribue $]0, 2]$ tout entier à D_f.

Sur $]2,+\infty[$: le dénominateur $e^{(2-x)^3}-1$ s'annule si et seulement si $(2-x)^3=0$, soit $x=2$, valeur déjà exclue de cette branche ($x>2$) ; cette branche contribue donc $]2,+\infty[$ tout entier.

Sur $]-\infty,0]$: la racine carrée étant elle-même au dénominateur, il faut $1+4\sin(\pi x)>0$ (inégalité **stricte**), soit

$$\sin(\pi x)>-\frac{1}{4}.$$

En posant $a=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$ (on a $0<a<1$), la résolution de $\sin(\theta)>-\frac{1}{4}$ donne

$$\theta\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi,\ \pi+\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right[,$$

et en posant $\theta=\pi x$:

$$x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]2k-a,\ 2k+1+a\right[.$$

On intersecte avec $x\leq 0$: seul le terme $k=0$ (tronqué en $]-a,0]$) et les termes $k\leq -1$ (entièrement contenus dans $]-\infty,0[$ car $2k+1+a\leq -1+a<0$) subsistent. D'où

$$D_f\cap\,]-\infty,0]=\,]-a,0]\ \cup\bigcup_{k\leq -1}]2k-a,\ 2k+1+a[.$$

En réunissant les trois morceaux :

$$\boxed{D_f=\bigcup_{k\leq -1}]2k-a,\ 2k+1+a[\,\cup\,]-a,0]\cup\,]0,+\infty[\,,\qquad a=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{4}\right).}$$

1.2 Étudier la parité, l'imparité et la périodicité d'une fonction

Méthode.
On vérifie d'abord que D_f est symétrique par rapport à 0, puis on calcule $f(-x)$ et on le compare à $f(x)$:

- si $f(-x)=f(x)$ pour tout $x\in D_f$, f est **paire** ;
- si $f(-x)=-f(x)$ pour tout $x\in D_f$, f est **impaire**.

Pour la **périodicité**, on cherche $T>0$ tel que $\forall x\in D_f$, $x\pm T\in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$.

Intérêt pratique : lorsque f est paire et/ou T-périodique, on restreint l'étude de f à un **domaine d'étude** plus petit, puis on complète le graphe par symétrie d'axe (Oy) (parité), par symétrie centrale en 0 (imparité), ou par translation de vecteur $T\vec{i}$ (périodicité). On combine en général les deux réductions, dans cet ordre : d'abord la périodicité, puis la parité sur l'intervalle obtenu.

Exemple.
Déterminer le domaine d'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)+1}.$$

Solution.
Domaine : $\cos^2(x)+1\geq 1>0$ pour tout x, donc $D_f=\mathbb{R}$.

Périodicité : $\cos(2(x+\pi))=\cos(2x+2\pi)=\cos(2x)$ et $\cos^2(x+\pi)=(-\cos x)^2=\cos^2(x)$, donc f est π-périodique. On restreint l'étude à un intervalle de longueur π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Parité : cet intervalle est symétrique par rapport à 0, et pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(-x)=\frac{\cos(-2x)}{\cos^2(-x)+1}=\frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)+1}=f(x)$$

(le cosinus étant pair). Donc f est paire, et on restreint encore l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Domaine d'étude :

$$\boxed{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}.$$

On complétera ensuite le graphe par symétrie d'axe (Oy) sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis par translations successives de vecteur $k\pi \vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Déterminer la fonction réciproque d'une fonction bijective donnée explicitement

Méthode.
Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction f donnée explicitement (et dont la bijectivité de D_f vers $\mathrm{Im}(f)$ a été établie), on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x, pour y fixé dans $\mathrm{Im}(f)$. L'expression de x en fonction de y ainsi obtenue est $f^{-1}(y)$.

Cas d'une fonction définie par morceaux : on procède **branche par branche**. Sur chaque branche, on vérifie que la restriction de f y est monotone (donc injective), on détermine l'image de la branche, puis on résout $y = f(x)$ sur cette branche. La fonction f^{-1} est alors elle-même définie par morceaux, un morceau par image de branche.

Exemple. TD 1, Exercice 7
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Déterminer D_f et, si elle existe, la fonction réciproque f^{-1}.

Solution.
$D_f = \mathbb{R}$, les deux branches étant définies sur tout leur domaine respectif.

Sur $x \leq 0$: $f(x) = 1 + x$ est affine de pente 1, donc strictement croissante ; lorsque x décrit $]-\infty, 0]$, $f(x)$ décrit $]-\infty, 1]$.

Sur $x > 0$: $f(x) = x^2 + 1$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; lorsque x décrit $]0, +\infty[$, $f(x)$ décrit $]1, +\infty[$.

Les images $]-\infty, 1]$ et $]1, +\infty[$ sont disjointes et leur réunion est $\mathbb{R}$; de plus les deux branches se raccordent continûment en 0 (valeur commune 1), donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier : f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On résout $y = f(x)$ sur chaque image :

- pour $y \leq 1$: $y = 1 + x \Leftrightarrow x = y - 1$;
- pour $y > 1$: $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$ (racine positive, car $x > 0$).

$$\boxed{f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 1 & \text{si } y \leq 1 \\ \sqrt{y-1} & \text{si } y > 1. \end{cases}}$$

1.4 Étudier une fonction par lecture graphique

Méthode.
Après avoir tracé (ou obtenu) le graphe de f, on lit directement sur ce graphe :

- le domaine D_f et l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$ (projections du graphe sur les axes) ;
- l'**injectivité** sur D_f : toute droite horizontale $y = y_0$ coupe le graphe en au plus un point ;
- la **surjectivité** sur B : toute droite horizontale $y = b$, $b \in B$, coupe le graphe en au moins un point ;
- les bornes $\inf_{D_f} f$, $\sup_{D_f} f$, et les éventuels minimum/maximum absolus (atteints ou non) ;
- les intervalles de **monotonie** ;
- en combinant injectivité et surjectivité (éventuellement après restriction de D_f ou de l'ensemble d'arrivée), la **bijectivité**, et le cas échéant la fonction réciproque (méthode 1.3).

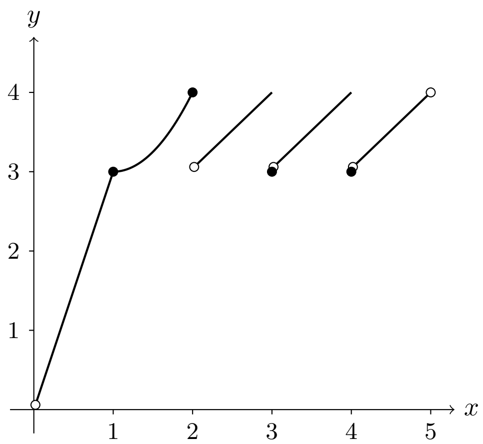
Exemple. Test du chapitre 1
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3|x| & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 + M(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

où M désigne la fonction partie fractionnaire ($M(x) = x - [x]$).

1. Déterminer D_f, tracer le graphe de f, et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
2. La fonction f est-elle injective sur D_f ? surjective sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer $\inf_{D_f} f$ et $\sup_{D_f} f$. La fonction f est-elle bornée ? possède-t-elle un minimum, un maximum absolus ?
4. La fonction f est-elle inversible sur D_f ? sur $]0, 2]$? Si oui, déterminer la fonction réciproque.

Solution.
1. Domaine et graphe. Les trois branches $]0, 1[$, $[1, 2]$, $]2, +\infty[$ recouvrent exactement $]0, +\infty[$, donc $D_f =]0, +\infty[$.



Sur $]0, 1[$, $f(x) = 3x$ décrit $]0, 3[$. Sur $[1, 2]$, $f(x) = (x - 1)^2 + 3$ est croissante (sommet en $x = 1$) et décrit $[3, 4]$. Sur $]2, +\infty[$, $f(x) = 3 + M(x)$ avec $M(x) \in [0, 1[$, donc $f(x) \in [3, 4[$ (ce sous-ensemble est déjà contenu dans $[3, 4]$). Au final :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) =]0, 3[\cup [3, 4] =]0, 4].}$$

2. Injectivité / surjectivité. Sur $]2, +\infty[$, f est 1-périodique : par exemple $f(2{,}5) = f(3{,}5) = 3{,}5$ avec $2{,}5 \neq 3{,}5$. Donc f n'est pas injective sur D_f. Comme $\mathrm{Im}(f) =]0, 4] \subsetneq \mathbb{R}$, f n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.
3. Bornes. Pour tout $x \in D_f$, $f(x) > 0$ et, lorsque $x \to 0^+$, $f(x) = 3x \to 0$: donc $\inf_{D_f} f = 0$, non atteint (pas de minimum). Le maximum de $(x - 1)^2 + 3$ sur $[1, 2]$ vaut 4, atteint en $x = 2$, et c'est aussi la plus grande valeur de f sur les deux autres branches (qui restent < 4) : donc

$$\boxed{\inf_{D_f} f = 0 \text{ (non atteint)}, \qquad \max_{D_f} f = 4 \text{ (atteint en } x = 2).}$$

f est majorée mais pas minorée par une valeur atteinte : f n'a pas de minimum, mais possède un maximum absolu.
4. Bijectivité. f n'étant pas injective sur D_f (question 2), elle n'est pas inversible sur D_f.
Sur $]0,2]$ en revanche : f est strictement croissante sur $]0,1[$ (vers $]0,3[$) et sur $[1,2]$ (vers $[3,4]$), avec un raccord continu en 1 ($f(1)=3$ des deux côtés) ; f est donc strictement croissante sur $]0,2]$ tout entier, donc injective, d'image $]0,4]$. Ainsi f réalise une bijection de $]0,2]$ sur $]0,4]$.
On résout $y=f(x)$ sur chaque branche :

- pour $y \in]0,3[$: $y=3x \Leftrightarrow x=\dfrac{y}{3}$;
- pour $y \in [3,4]$: $y=(x-1)^2+3 \Leftrightarrow (x-1)^2=y-3 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{y-3}$ (racine positive, car $x \geq 1$).

$$\boxed{f^{-1}(y)=\begin{cases} \dfrac{y}{3} & \text{si } y \in]0,3[\\ 1+\sqrt{y-3} & \text{si } y \in [3,4]. \end{cases}}$$

2

Suites numériques et limites

Acquis d'Apprentissage.

- La notion de suite, de monotonie et de bornes d'une suite.
- La limite d'une suite (convergence, divergence).
- Le théorème de la limite monotone.
- Les suites adjacentes.
- Les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.1 Démontrer une formule explicite d'une suite par récurrence et en déduire sa limite

Méthode.
Pour démontrer qu'une suite (u_n) définie par récurrence vérifie une formule explicite $u_n = g(n)$ pour tout n (à partir d'un rang n_0), on procède par **récurrence** :

1. **Initialisation** : on vérifie que $u_{n_0} = g(n_0)$.
2. **Hérédité** : on suppose que $u_n = g(n)$ pour un rang $n \geq n_0$ fixé (hypothèse de récurrence), et on montre, en substituant cette hypothèse dans la relation de récurrence, que $u_{n+1} = g(n+1)$.

On conclut que $u_n = g(n)$ pour tout $n \geq n_0$. Il suffit ensuite de calculer $\lim_{n\to+\infty} g(n)$ (limite d'une expression explicite, par les techniques usuelles) pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exemple. Annale 2024-2025, Exercice 1
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}.$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution.
1. Récurrence.
Initialisation : $u_1 = 3$ et $\dfrac{2\times 1+1}{1} = 3$. La formule est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$; montrons que $u_{n+1} = \dfrac{2n+3}{n+1}$. On a

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1} = \frac{3 \times \frac{2n+1}{n} - 4}{\frac{2n+1}{n} - 1} = \frac{\frac{6n+3-4n}{n}}{\frac{2n+1-n}{n}} = \frac{2n+3}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1}.$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{2n+1}{n}.}$$

2. Limite.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \boxed{2}.$$

2.2 Étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$: monotonie, convergence et limite

Méthode.
Pour étudier une suite récurrente définie par u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$:

1. On cherche un intervalle I **stable** par f (c'est-à-dire $f(I) \subseteq I$) contenant u_0 : ainsi $u_n \in I$ pour tout n, par récurrence immédiate.
2. On établit, le plus souvent par récurrence (sur une propriété portant sur deux termes consécutifs à la fois), un encadrement du type $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq M$ (ou l'inégalité inverse) : cela donne **simultanément** la monotonie de (u_n) et son caractère borné.
3. On conclut à la **convergence** de (u_n) par le théorème de la limite monotone (Théorème 2.5 du cours).
4. Si f est continue en la limite ℓ, on passe à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$: ℓ vérifie l'équation du **point fixe** $f(\ell) = \ell$. On résout cette équation, puis on sélectionne, parmi les solutions trouvées, celle qui est compatible avec l'encadrement établi à l'étape 2.

Remarque. L'argument clé de l'étape 2
Si f est **croissante** sur I, elle conserve l'ordre : de $u_{n+1} \leq u_n$ on déduit $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Une comparaison entre u_1 et u_0 se propage donc, par récurrence, à tous les rangs suivants.

Exemple. Annale 2023-2024, Exercice 1, Partie B
Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5x^4}{8(x^2+1)}.$$

On admet que f est croissante sur $[0, +\infty[$ et que $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Déterminer sa limite.

Solution.
1. Encadrement par récurrence.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = f(1) = \dfrac{5}{16}$, donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$. Comme f est croissante sur $[0, +\infty[$ (remarque ci-dessus), on a

$$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(2),$$

c'est-à-dire (puisque $f(0) = 0$ et $f(2) = \dfrac{5 \times 16}{8 \times 5} = 2$) :

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Conclusion : par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2.}$$

2. Convergence. L'inégalité précédente montre que (u_n) est **décroissante** et **minorée** par 0 : par le théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente, vers une limite $\ell \geq 0$.

3. Calcul de la limite. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ (quotient de fonctions continues, dénominateur jamais nul) ; en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$:

$$\frac{5\ell^4}{8(\ell^2+1)} = \ell \;\Leftrightarrow\; 5\ell^4 = 8\ell^3 + 8\ell \;\Leftrightarrow\; \ell\left(5\ell^3 - 8\ell^2 - 8\right) = 0.$$

On remarque que $\ell = 2$ est racine de $5\ell^3 - 8\ell^2 - 8$ (en effet $5 \times 8 - 8 \times 4 - 8 = 0$), ce qui permet de factoriser :

$$5\ell^3 - 8\ell^2 - 8 = (\ell - 2)(5\ell^2 + 2\ell + 4).$$

Le discriminant de $5\ell^2+2\ell+4$ est $\Delta = 4-80=-76<0$: pas de racine réelle. Les solutions de $f(\ell)=\ell$ sont donc $\ell=0$ ou $\ell=2$.

Or (u_n) est décroissante et $u_0=1<2$, donc $\ell \leq u_0 = 1 < 2$: la valeur $\ell=2$ est exclue. Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

2.3 Démontrer que deux suites sont adjacentes et en déduire leur limite commune

Propriété. Suites adjacentes (Théorème 2.21 du cours)
Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$. Dans ce cas, (u_n) et (v_n) convergent vers une **même limite**.

Méthode.
Pour démontrer que deux suites (u_n) et (v_n), définies par un même système de récurrence, sont adjacentes :

1. On montre, souvent par récurrence simultanée, un encadrement du type $u_n \leq v_n$ pour tout n, qui permet d'établir que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
2. Chaque suite est alors monotone et bornée par l'autre (donc bornée) : par le théorème de la limite monotone, (u_n) et (v_n) convergent chacune vers une limite finie, notées ℓ_1 et ℓ_2.
3. On passe à la limite dans les relations de récurrence pour montrer que $\ell_1=\ell_2$: on en déduit que $v_n-u_n\to 0$, ce qui achève de montrer que les deux suites sont adjacentes, de limite commune $\ell=\ell_1=\ell_2$.

Exemple. Test 2 du chapitre 2, Exercice II
On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0=1, \quad v_0=4, \qquad \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}, \quad v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}v_n}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Solution.
Étape 1 : encadrement $0<u_n\leq v_n$.
Initialisation : $u_0=1\leq v_0=4$.
Hérédité : supposons $0<u_n\leq v_n$. Alors

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\in[u_n,v_n] \quad \text{(moyenne de deux termes)},$$

donc en particulier $u_{n+1}\leq v_n$. On en déduit

$$v_{n+1}^2=u_{n+1}v_n\geq u_{n+1}^2 \quad\Longrightarrow\quad v_{n+1}\geq u_{n+1}$$

(les deux membres étant positifs), et

$$v_{n+1}^2=u_{n+1}v_n\leq v_n^2 \quad\Longrightarrow\quad v_{n+1}\leq v_n.$$

Donc $0<u_{n+1}\leq v_{n+1}$: l'encadrement se propage par récurrence.

Étape 2 : monotonie et convergence. Puisque $v_n\geq u_n$ pour tout n, on a $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}\geq u_n$: la suite (u_n) est **croissante**. L'inégalité $v_{n+1}\leq v_n$ obtenue ci-dessus montre que (v_n) est **décroissante**.
De plus (u_n) est croissante et majorée par $v_0=4$ (car $u_n\leq v_n\leq v_0$), donc convergente vers une limite ℓ_1 ; et (v_n) est décroissante et minorée par $u_0=1$, donc convergente vers une limite ℓ_2.

Étape 3 : limite commune. En passant à la limite dans $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$, on obtient $\ell_1=\dfrac{\ell_1+\ell_2}{2}$, soit $\ell_1=\ell_2$. Ainsi $v_n-u_n\to\ell_2-\ell_1=0$.

Conclusion : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et $v_n - u_n \to 0$: les suites (u_n) et (v_n) sont

$$\boxed{\text{adjacentes, et convergent vers une même limite } \ell.}$$

3

La limite et fonctions continues

Acquis d'Apprentissage.

- Les limites d'une fonction (finies, infinies, en un point ou en $\pm\infty$).
- Les notations de Landau (o, $\sim$) et la hiérarchie des infinis.
- La continuité d'une fonction et la classification des discontinuités.
- Les asymptotes verticales, horizontales et obliques.
- Les théorèmes de Weierstrass, Darboux, Bolzano, et le théorème de la bijection.

3.1 Calculer une limite indéterminée par transformation algébrique

Méthode.
Pour lever une indétermination dans le calcul d'une limite (formes $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, etc.), on transforme l'expression algébriquement :

- on **factorise** le numérateur et le dénominateur par leur terme dominant (la plus haute puissance de x en $\pm\infty$), puis on simplifie ;
- on multiplie par la **quantité conjuguée** lorsqu'une différence de racines apparaît : pour des racines carrées, $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$; pour des racines cubiques, $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$;
- on effectue un **changement de variable** $X = g(x)$ lorsque $f(x) = h(g(x))$: on calcule alors $\lim_{X \to X_0} h(X)$, où $X_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$ (limite d'une fonction composée, Proposition 3.4 du cours).

Exemple. Application n°1 — TD 3.1, Exercice 1.p
Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^9 + 12x^6 + x + 2} - x^3 \right).$$

Solution.
Posons $a = \sqrt[3]{x^9 + 12x^6 + x + 2}$ et $b = x^3$. La différence $a - b$ est de la forme $\frac{0}{0}$ après factorisation (deux termes qui tendent chacun vers $+\infty$) ; on multiplie par la quantité conjuguée généralisée aux racines cubiques, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$:

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(x^9 + 12x^6 + x + 2) - x^9}{a^2 + ab + b^2} = \frac{12x^6 + x + 2}{a^2 + ab + b^2}.$$

On factorise par x^6 au numérateur et au dénominateur. Au numérateur : $\dfrac{12x^6 + x + 2}{x^6} = 12 + \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{2}{x^6} \to 12$.
Au dénominateur, en notant que $\dfrac{a}{x^3} = \sqrt[3]{1 + \dfrac{12}{x^3} + \dfrac{1}{x^8} + \dfrac{2}{x^9}} \to 1$ et $\dfrac{b}{x^3} = 1$:

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{x^6} = \left(\frac{a}{x^3}\right)^2 + \frac{a}{x^3} \cdot \frac{b}{x^3} + \left(\frac{b}{x^3}\right)^2 \to 1 + 1 + 1 = 3.$$

Donc
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^9 + 12x^6 + x + 2} - x^3 \right) = \frac{12}{3} = \boxed{4}.$$

Exemple. Application n°2 — changement de variable
Calculer
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1}.$$

Solution.
On a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. On pose $X = \ln(x)$: lorsque $x \to 0^+$, $X \to -\infty$, et l'expression devient
$$\frac{X^2+2X}{X^2+1}.$$
On factorise par X^2 (terme dominant) :
$$\frac{X^2+2X}{X^2+1} = \frac{1+\frac{2}{X}}{1+\frac{1}{X^2}} \xrightarrow[X\to-\infty]{} 1.$$
Par la propriété de limite d'une fonction composée,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1} = \boxed{1}.$$

3.2 Calculer une limite indéterminée à l'aide des équivalents usuels et de la hiérarchie des infinis

Méthode.
Pour calculer une limite indéterminée se présentant comme un **produit ou un quotient** de plusieurs facteurs, on remplace chaque facteur par un **équivalent** plus simple au voisinage du point étudié :

- **hiérarchie des infinis** : un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $\pm\infty$ (à son terme de plus bas degré en 0) ; plus généralement, en $+\infty$, $\ln^b(x) \ll x^c \ll \alpha^x \ll x!$ ($\alpha > 1$, $b, c > 0$) ;
- **équivalents usuels** : si $f(x) \to 0$, alors $\sin f(x) \sim f(x)$, $\tan f(x) \sim f(x)$, $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$, $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$, $1 - \cos f(x) \sim \dfrac{f(x)^2}{2}$.

On peut **multiplier ou diviser** des équivalents entre eux pour simplifier l'expression mais jamais les **additionner ou les soustraire** sans précaution (composer une somme d'équivalents peut donner un résultat faux).

Exemple. Application n°1 — Annale 2024-2025, Exercice 4.a
Calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x-5}{x-1} \tan\left(\frac{2}{x^2}\right).$$

Solution.
En $+\infty$, $\dfrac{2x^3+x-5}{x-1} \sim \dfrac{2x^3}{x} = 2x^2$ (terme dominant au numérateur et au dénominateur).
Posons $X = \dfrac{2}{x^2}$: lorsque $x \to +\infty$, $X \to 0$, et $\tan(X) \sim X$, donc $\tan\left(\dfrac{2}{x^2}\right) \sim \dfrac{2}{x^2}$.
En multipliant les deux équivalents :
$$\frac{2x^3+x-5}{x-1} \tan\left(\frac{2}{x^2}\right) \sim 2x^2 \times \frac{2}{x^2} = 4.$$
Donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x-5}{x-1} \tan\left(\frac{2}{x^2}\right) = \boxed{4}.$$

Exemple. Application n°2 — Annale 2023-2024, Exercice 4.a
Calculer
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x+1}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right).$$

Solution.
En $+\infty$, $\dfrac{2x^3+1}{x+1} \sim \dfrac{2x^3}{x} = 2x^2$.
Posons $X = -\dfrac{1}{x}$: lorsque $x \to +\infty$, $X \to 0$, et $e^X - 1 \sim X$, donc $e^{-\frac{1}{x}} - 1 \sim -\dfrac{1}{x}$.
En multipliant les deux équivalents :
$$\frac{2x^3+1}{x+1}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right) \sim 2x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty.$$
Donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x+1}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right) = \boxed{-\infty}.$$

3.3 Étudier la continuité d'une fonction et classifier ses discontinuités

Propriété. Classification des discontinuités
Soit x_0 un point de discontinuité de f. On dit que x_0 est un point de discontinuité :
- de **première espèce** (ou **apparente**) si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe mais $\ell \neq f(x_0)$;
- de **deuxième espèce** (**saut fini**) si les limites unilatérales $\ell_-, \ell_+ \in \mathbb{R}$ existent mais $\ell_- \neq \ell_+$ (le saut est $S = |\ell_- - \ell_+|$) ;
- de **troisième espèce** (**saut infini** ou discontinuité essentielle/inamovible) si l'une au moins des limites unilatérales n'existe pas ou est infinie.

Méthode.
Pour étudier la continuité de f en un point x_0 (typiquement un point de raccord d'une fonction définie par morceaux) et classifier une éventuelle discontinuité :
1. On justifie que f est continue sur $D_f \setminus \{x_0\}$ (somme, produit, rapport, composée de fonctions continues « SPRC »).
2. On calcule les limites unilatérales $\ell_- = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\ell_+ = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (avec les techniques des méthodes 3.1 et 3.2).
3. On compare ℓ_-, ℓ_+ et $f(x_0)$, et on classe la discontinuité éventuelle à l'aide de la propriété ci-dessus.

Exemple. Annale 2025-2026, Exercice I
Soit f la fonction qui, à tout réel $x \in D_f$, associe :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)}{\sqrt{1+4\sin(\pi x)}} & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln(1+3x^2) & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1-\cos(2-x)}{e^{(2-x)^3}-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
Étudier la continuité de f et classifier les discontinuités.

Solution.
f est continue sur $D_f \setminus \{0, 2\}$, comme SPRC de fonctions continues sur chaque branche.

En $x_0 = 0$:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(1+3x^2) = 0 \quad \text{(produit d'une limite nulle par une limite nulle)},$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\cos(0)}{\sqrt{1+4\sin(0)}} = \frac{1}{1} = 1 = f(0).$$

Les deux limites unilatérales existent et sont finies, mais $0 \neq 1$: $x_0 = 0$ est un point de discontinuité de deuxième espèce (saut fini), de saut $S = |0-1| = 1.$

En $x_0 = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2\ln(1+12) = 2\ln(13) = f(2).$$

Pour la limite à droite, on pose $t = 2 - x \to 0^-$ lorsque $x \to 2^+$. En utilisant les équivalents usuels $1-\cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ et $e^{t^3} - 1 \sim t^3$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1-\cos(t)}{e^{t^3}-1} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t^2/2}{t^3} = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{2t} = -\infty.$$

La limite à droite est infinie : $x_0 = 2$ est un point de discontinuité de

troisième espèce (saut infini).

3.4 Déterminer les asymptotes verticales, horizontales et obliques

Propriété. Branches infinies
Soient $a, b, m, q \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \infty$, C_f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$.
2. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, C_f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$.
3. Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ et $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx] = q$ (avec $m \neq 0$), C_f admet une **asymptote oblique** d'équation $y = mx + q$.

(Une fonction n'a pas d'asymptote oblique là où elle a déjà une asymptote horizontale ; on peut avoir des asymptotes différentes à droite et à gauche.)

Méthode.
Pour déterminer les asymptotes d'une fonction f :

1. Aux bornes **finies exclues** de D_f (souvent des zéros du dénominateur), on calcule la limite unilatérale ; si elle est infinie, on a une asymptote verticale.
2. En $\pm\infty$, on calcule $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$: si elle est finie, on a une asymptote horizontale.
3. Si f tend vers $\pm\infty$ sans asymptote horizontale, on cherche une asymptote oblique en calculant $m = \lim \frac{f(x)}{x}$, puis $q = \lim[f(x) - mx]$.

Exemple. Application n°1 — Annale 2025-2026, Exercice III
On considère la fonction $f(x) = \frac{|x-5|\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}$. Déterminer D_f et les droites asymptotes.

Solution.
Domaine : il faut $x^2 - 1 \geq 0$ et $x^2 - 9 \neq 0$, donc

$$D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, -1] \ \cup \ [1, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Asymptotes verticales : en $x = \pm 3$, le numérateur tend vers une valeur finie non nulle ($|\pm 3 - 5|\sqrt{9-1} \neq 0$) tandis que le dénominateur tend vers 0, donc

$$\lim_{x\to -3^\pm} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\infty :$$

$x = -3$ et $x = 3$ sont des asymptotes verticales.

Asymptote horizontale : en $\pm\infty$, $|x-5| \sim |x|$ et $\sqrt{x^2-1} \sim |x|$, donc

$$f(x) \sim \frac{|x| \cdot |x|}{x^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 :$$

$$\boxed{y = 1 \text{ est une asymptote horizontale (à droite et à gauche).}}$$

Exemple. Application n°2 — asymptotes obliques distinctes, exemple du cours
Déterminer les asymptotes de $f(x) = x + \arctan(x)$.

Solution.
$D_f = \mathbb{R}$ (pas d'asymptote verticale). Comme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, il n'y a pas d'asymptote horizontale. On cherche une asymptote oblique :

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{\arctan(x)}{x}\right) = 1$$

(car $\arctan(x)$ est bornée). Puis

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

On obtient ainsi deux asymptotes obliques différentes :

$$\boxed{y = x + \frac{\pi}{2} \text{ à droite } (x \to +\infty), \qquad y = x - \frac{\pi}{2} \text{ à gauche } (x \to -\infty).}$$

3.5 Démontrer l'existence d'une solution à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires (Bolzano)

Propriété. Théorèmes de Weierstrass, Darboux et Bolzano
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

- (**Weierstrass**) f est bornée sur $[a,b]$ et y atteint ses bornes (possède un minimum et un maximum absolus).
- (**Darboux** - théorème des valeurs intermédiaires) pour tout y compris entre $\inf f$ et $\sup f$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.
- (**Bolzano**) si $f(a)f(b) < 0$ (changement de signe), il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Méthode.
Pour démontrer qu'une équation $f(x) = 0$ admet (au moins) une solution sur $[a,b]$, sans avoir besoin d'étudier la monotonie de f :

1. On vérifie que f est continue sur $[a,b]$.
2. On calcule (ou on encadre le signe de) $f(a)$ et $f(b)$: s'ils sont de signes opposés ($f(a)f(b) < 0$), le théorème de Bolzano garantit l'existence d'au moins un $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Attention : ce théorème ne donne que l'**existence** d'une solution, pas son **unicité** contrairement au théorème de la bijection (méthode 3.6), qui exige en plus la stricte monotonie de f mais conclut à l'unicité.

Exemple. Exemple classique
Démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet au moins une solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution.
Posons $f(x) = \cos(x) - x$. f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (différence de fonctions continues). On a

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0.$$

Donc $f(0)\,f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$: par le théorème de Bolzano, il existe

$$\boxed{c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que } \cos(c) = c.}$$

3.6 Démontrer qu'une fonction réalise une bijection à l'aide du théorème de la bijection

Propriété. Théorème de la bijection
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et sa réciproque f^{-1} est elle-même continue sur J, strictement monotone et de même sens de variation que f.

Méthode.
Pour démontrer qu'une fonction f réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, et en déduire l'existence (et l'unicité) d'une solution à une équation $f(x) = k$ sur I :

1. On montre que f est continue sur I et **strictement monotone** sur I (à l'aide du signe de sa dérivée (méthode 4.2) ou directement, par exemple comme combinaison de fonctions usuelles monotones).
2. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, intervalle que l'on détermine à l'aide des limites (ou valeurs) de f aux extrémités de I.
3. Si $k \in J$, l'équation $f(x) = k$ admet alors une unique solution dans I : l'antécédent de k par la bijection f.

Exemple. Exemple du cours
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $I = [-1, 0]$ sur un intervalle J à déterminer.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1, 0]$.

Solution.
1. f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale), donc sur $[-1, 0]$. De plus $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-1, 0]$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[-1, 0]$ sur

$$J = f([-1, 0]) = [f(-1), f(0)] = [-1, 1].$$

2. Puisque $0 \in J = [-1, 1]$, on en déduit que

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } [-1, 0].}$$

4

Fonctions dérivables et développements limités

Acquis d'Apprentissage.

- La dérivabilité, la dérivée, et les points de non-dérivabilité.
- Les théorèmes de Rolle, Lagrange, Fermat, de l'Hôpital.
- Le plan d'étude d'une fonction.
- Les développements limités usuels et les opérations sur les DL.
- Les applications des DL : tangente, limites, asymptotes obliques.

4.1 Étudier la dérivabilité d'une fonction et classifier les points de non-dérivabilité

Propriété. Classification des points de non-dérivabilité

Soit $x_0 \in D_f$ tel que les dérivées unilatérales $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existent (dans $\overline{\mathbb{R}}$) mais f n'est pas dérivable en x_0 :

- si $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ sont **finies et distinctes** : **point anguleux** (deux demi-tangentes non verticales) ;
- si $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = \pm\infty$ (même signe) : point d'**inflexion à tangente verticale** ;
- si $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ sont infinies de **signes opposés** : point de **rebroussement (cuspide)**.

Lorsque x_0 est une extrémité d'une composante de D_f (un seul côté appartient à D_f), seule la dérivée unilatérale correspondante a un sens : si elle est infinie, on parle de **demi-tangente verticale**.

Méthode.
Pour étudier la dérivabilité de f en x_0 et classifier un éventuel point de non-dérivabilité :

1. On calcule séparément $f'_-(x_0)$ et $f'_+(x_0)$ (lorsque les deux côtés appartiennent à D_f), à l'aide des techniques de calcul de limites (méthodes 3.1 et 3.2).
2. On compare les deux valeurs obtenues à la propriété ci-dessus pour classer le point.

Exemple. Annale 2025-2026, Exercice III

On considère $f(x) = \dfrac{|x-5|\sqrt{x^2-1}}{x^2-9}$, de domaine $D_f =]-\infty,-3[\cup]-3,-1] \cup [1,3[\cup]3,+\infty[$. Classifier les points de non-dérivabilité de f.

Solution.
Les candidats sont $x_0 = 5$ (changement de signe de $|x-5|$) et $x_{1,2} = \pm 1$ (extrémités de D_f, là où $\sqrt{x^2-1}$ s'annule).

<u>En $x_0 = 5$</u> : $f(5) = 0$, et pour x proche de 5,

$$\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \frac{|x-5|\sqrt{x^2-1}}{(x^2-9)(x-5)}.$$

À droite ($x > 5$, $|x-5| = x-5$) :

$$\frac{f(x)}{x-5} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-9} \xrightarrow[x\to 5^+]{} \frac{\sqrt{24}}{16} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

À gauche ($x < 5$, $|x-5| = 5-x = -(x-5)$) :

$$\frac{f(x)}{x-5} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-9} \xrightarrow[x\to 5^-]{} -\frac{\sqrt{6}}{8}.$$

Les deux dérivées unilatérales sont finies et distinctes :

$$\boxed{(5,0) \text{ est un point anguleux.}}$$

En $x_1 = 1$ (seul le côté $x > 1$ appartient à D_f) : $f(1) = 0$, et en écrivant $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{|x-5|\sqrt{x+1}}{x^2-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Quand $x \to 1^+$, le préfacteur tend vers $\dfrac{4\sqrt{2}}{-8} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (car $x^2-9 \to -8 < 0$), tandis que $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \to +\infty$, donc

$$f'_+(1) = -\infty.$$

Comme seul ce côté existe, on a une $\boxed{\text{demi-tangente verticale en } (1,0).}$

En $x_2 = -1$ (seul le côté $x < -1$ appartient à D_f) : de même, en écrivant $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{1-x}\sqrt{-1-x}$ et en posant $t = -1-x \to 0^+$,

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\frac{|x-5|\sqrt{1-x}}{x^2-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$$

(le préfacteur tend vers $-\dfrac{6\sqrt{2}}{-8} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} > 0$), donc $f'_-(-1) = +\infty$: on a une

$$\boxed{\text{demi-tangente verticale en } (-1,0).}$$

Remarque : ces deux derniers points sont parfois appelés, par extension du vocabulaire (et c'est ce que fait le corrigé officiel), des « points cuspides à droite/à gauche ». La prudence impose toutefois de vérifier qu'un seul côté du point appartient réellement à D_f.

4.2 Démontrer une existence ou une inégalité à l'aide des théorèmes de Fermat, Rolle et Lagrange

Propriété. Théorèmes de Fermat, Rolle et Lagrange

- (**Fermat**) Si x_0 est un point intérieur à D_f et un extremum local de f, dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ (la réciproque est fausse : $f(x) = x^3$ admet $x_0 = 0$ comme point critique sans extremum).
- (**Rolle**) Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- (**Lagrange** - théorème des accroissements finis) Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Méthode.
Ces théorèmes ne servent pas à **calculer**, mais à démontrer l'**existence** d'un point particulier :

- pour démontrer qu'une équation $f'(x) = 0$ admet (au moins) n solutions sur $]a,b[$, on exhibe $n+1$ zéros (ou $n+1$ valeurs égales) de f, et on applique le théorème de **Rolle** sur chacun des n intervalles consécutifs qu'ils délimitent ;
- pour démontrer une **inégalité** du type $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$, on applique **Lagrange** entre a et b, puis on majore $|f'(c)|$ par M sur l'intervalle.

Exemple. Exemple du cours — Rolle itéré
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, n fois dérivable sur $[a, b]$, qui s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n solutions sur $]a, b[$.

Solution.
Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n+1}$ des points distincts de $[a, b]$ en lesquels f s'annule. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, f est continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, dérivable sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, et $f(\alpha_k) = f(\alpha_{k+1}) = 0$: par le théorème de Rolle, il existe

$$\beta_k \in \,]\alpha_k, \alpha_{k+1}[\quad \text{tel que} \quad f'(\beta_k) = 0.$$

Comme $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$, les n réels $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont deux à deux distincts. Donc

$$\boxed{f'(x) = 0 \text{ admet au moins } n \text{ solutions distinctes sur }]a, b[.}$$

Exemple. Application n°2 — inégalité par Lagrange
Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

Solution.
Si $x = y$, l'inégalité est triviale. Supposons $x \neq y$; quitte à échanger x et y, on suppose $x < y$. La fonction $\sin$ est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$: par le théorème de Lagrange, il existe $c \in \,]x, y[$ tel que

$$\sin(y) - \sin(x) = \cos(c)(y - x).$$

Or $|\cos(c)| \leq 1$ pour tout c, donc

$$\boxed{|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(c)|\,|x - y| \leq |x - y|.}$$

4.3 Démontrer la bijectivité via le signe de la dérivée, déterminer la réciproque et sa dérivée

Méthode.
Pour démontrer qu'une fonction f est bijective à l'aide du signe de sa dérivée, et déterminer sa fonction réciproque (ou la dérivée de celle-ci) :

1. On calcule $f'(x)$ et on étudie son signe sur D_f (ou sur l'intervalle I considéré) : si f' garde un signe strict constant, f est strictement monotone sur I.
2. On calcule les limites (ou valeurs) de f aux extrémités de I pour déterminer $J = f(I)$.
3. Par le théorème de la bijection (méthode 3.6), f réalise une bijection de I sur J.
4. Pour déterminer f^{-1} explicitement, on résout $y = f(x)$ d'inconnue x (méthode 1.3). Si seule la valeur de $(f^{-1})'$ en un point $y_0 = f(x_0)$ est demandée, on peut éviter ce calcul et utiliser directement

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple. Application n°1 — Annale 2024-2025, Exercice 2.2

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{2x}}$.

1. Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.
2. Déterminer sa bijection réciproque.

Solution.

1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, le théorème de la bijection donne :

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } I =]0, 2[.}$$

2. Pour $y \in]0, 2[$:

$$y = \frac{2}{1+e^{2x}} \Leftrightarrow y(1+e^{2x}) = 2 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{2}{y} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{y} - 1\right).$$

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{y} - 1\right), \quad y \in]0, 2[.}$$

Exemple. Application n°2 — TD 4.2, Exercice 7

Soit $f(x) = \dfrac{\ln x - 3}{\ln x + 2}$. Dire si f est inversible sur D_f et calculer $(f^{-1})'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

Solution.

$D_f =]0, e^{-2}[\cup]e^{-2}, +\infty[$. En posant $t = \ln x$ (bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$), $f(x) = g(t) = \dfrac{t-3}{t+2}$ avec $g'(t) = \dfrac{5}{(t+2)^2} > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$: g est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$, d'images respectives $]1, +\infty[$ et $]-\infty, 1[$, qui sont **disjointes**. Donc g, et par composition f, est injective sur D_f : f est inversible sur D_f.

On cherche x_0 tel que $f(x_0) = -\dfrac{3}{2}$:

$$g(t) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(t-3) = -3(t+2) \Leftrightarrow 5t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x_0 = e^0 = 1.$$

On calcule

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x + 2) - (\ln x - 3)\frac{1}{x}}{(\ln x + 2)^2} = \frac{5}{x(\ln x + 2)^2}, \qquad f'(1) = \frac{5}{1 \times 4} = \frac{5}{4}.$$

Par la formule de la dérivée de la réciproque :

$$\boxed{(f^{-1})'\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4}{5}.}$$

4.4 Déterminer un développement limité par les opérations usuelles

Méthode.
Pour déterminer le DL d'une fonction obtenue par combinaison de fonctions usuelles, on combine les DL élémentaires (tableau des DL usuels) à l'aide des théorèmes suivants :

- **DL d'une somme/produit** (Théorème 4.16) : on additionne (resp. multiplie, en ne gardant que les termes de degré $\leq n$) les DL de chaque facteur, calculés au même ordre n ;
- **DL d'une composée** (Théorème 4.17) : si f admet un DL d'ordre n en x_0 et g un DL d'ordre n en $y_0 = f(x_0)$, on substitue le DL de f dans celui de g ;
- **DL d'un quotient** (Théorème 4.18) : on factorise numérateur et dénominateur par leur terme dominant, puis on ramène le calcul à celui de $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

On calcule chaque DL intermédiaire à un ordre **suffisant** (souvent supérieur à l'ordre final visé) pour ne perdre aucune précision lors des produits, compositions ou divisions.

Exemple. Application n°1 — Annale 2025-2026, Exercice II
On considère
$$f(x) = 12x^3\big(1 - \cos(2x^2)\big) + 3x\big(\ln(1+2x^2)\big)^2 + 4\sin(2x^2).$$
Déterminer le développement limité à l'ordre 7, au voisinage de $x_0 = 0$, de f.

Solution.
On traite chaque terme séparément, à l'ordre nécessaire.

<u>Terme 1</u> : $1 - \cos(u) = \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ avec $u = 2x^2$, donc $1 - \cos(2x^2) = 2x^4 + o(x^4)$, et
$$12x^3\big(1 - \cos(2x^2)\big) = 12x^3(2x^4 + o(x^4)) = 24x^7 + o(x^7).$$

<u>Terme 2</u> : $\ln(1+v) = v - \dfrac{v^2}{2} + o(v^2)$ avec $v = 2x^2$, donc $\ln(1+2x^2) = 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$, puis
$$\big(\ln(1+2x^2)\big)^2 = (2x^2 - 2x^4 + o(x^4))^2 = 4x^4 - 8x^6 + o(x^6),$$
et
$$3x\big(\ln(1+2x^2)\big)^2 = 3x(4x^4 - 8x^6 + o(x^6)) = 12x^5 - 24x^7 + o(x^7).$$

<u>Terme 3</u> : $\sin(w) = w - \dfrac{w^3}{6} + o(w^3)$ avec $w = 2x^2$, donc $\sin(2x^2) = 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^6 + o(x^6)$, et
$$4\sin(2x^2) = 8x^2 - \frac{16}{3}x^6 + o(x^6).$$

<u>Somme des trois termes</u> (à l'ordre 7) :
$$f(x) = \underbrace{8x^2}_{\text{terme 3}} + \underbrace{12x^5}_{\text{terme 2}} - \underbrace{\frac{16}{3}x^6}_{\text{terme 3}} + \underbrace{(24-24)x^7}_{\text{termes 1 et 2}} + o(x^7).$$
$$\boxed{f(x) = 8x^2 + 12x^5 - \frac{16}{3}x^6 + o(x^7).}$$

Exemple. Application n°2 — DL d'un quotient, Annale 2023-2024, Exercice 2.1
Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{e^{-x} - 1}$.

Solution.
Le dénominateur $e^{-x} - 1 \sim -x$ s'annule à l'ordre 1 : on calcule donc numérateur et dénominateur à l'ordre 3

pour obtenir le quotient à l'ordre 2.

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3), \qquad e^{-x} - 1 = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On factorise chacun par x :

$$f(x) = \frac{2 - 2x + \frac{8}{3}x^2 + o(x^2)}{-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = -\left(2 - 2x + \tfrac{8}{3}x^2\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}} + o(x^2).$$

En posant $v = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6}$, $\dfrac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 + o(x^2) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$. D'où

$$f(x) = -\left(2 - 2x + \frac{8}{3}x^2\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}x^2\right) + o(x^2) = -\left(2 - x + \frac{11}{6}x^2\right) + o(x^2).$$

$$\boxed{f(x) = -2 + x - \frac{11}{6}x^2 + o(x^2).}$$

4.5 Exploiter un développement limité pour l'étude locale d'une fonction

Méthode.
Soit $f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$ le DL de f en x_0 (avec c_k le premier coefficient non nul après c_1, $k \geq 2$).

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = c_0$; la **tangente** à C_f en x_0 a pour équation $y = c_0 + c_1(x - x_0)$.
- La **position** de C_f par rapport à la tangente est donnée par le signe de $c_k(x - x_0)^k$: si k est **pair**, ce signe est constant (courbe au-dessus si $c_k > 0$, en dessous si $c_k < 0$) ; si k est **impair**, le signe change en x_0 : **point d'inflexion** à tangente oblique.
- Si $c_1 = 0$ (tangente horizontale) et c_k est le premier coefficient non nul après c_0 : si k est **pair**, x_0 est un extremum local (minimum si $c_k > 0$, maximum si $c_k < 0$) ; si k est **impair**, x_0 est un point d'inflexion à tangente horizontale.
- Le DL donne directement les dérivées en x_0 via $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, soit $f^{(n)}(x_0) = n!\, c_n$ (avec $c_n = 0$ si le terme $(x - x_0)^n$ n'apparaît pas dans le DL).

Exemple. Application n°1 — Annale 2024-2025, Exercice 2.1
On reprend $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{2x}}$, dont le DL à l'ordre 3 en 0 est $f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. En déduire l'étude locale en 0 de f (limite, tangente, position de la courbe par rapport à la tangente).

Solution.
$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. La tangente Δ à C_f en 0 a pour équation $y = 1 - x$ (coefficients $c_0 = 1$, $c_1 = -1$).
Le premier terme après c_1 est $\dfrac{1}{3}x^3$, de degré $k = 3$ **impair** : le signe de $\dfrac{1}{3}x^3$ change en 0, donc

$$\boxed{(0,1) \text{ est un point d'inflexion : } C_f \text{ est en dessous de } \Delta \text{ pour } x < 0, \text{ au-dessus pour } x > 0.}$$

Exemple. Application n°2 — Annale 2025-2026, Exercice II (suite)

On reprend le DL de la méthode précédente : $f(x) = 8x^2 + 12x^5 - \frac{16}{3}x^6 + o(x^7)$.

1. Dire si $x_0 = 0$ est un point de minimum local, maximum local, ou inflexion à tangente horizontale.
2. Calculer $f^{(4)}(0)$ et $f^{(7)}(0)$.

Solution.

1. Ici $c_1 = 0$ et le premier coefficient non nul est $c_2 = 8$ (terme $8x^2$), de degré $k = 2$ **pair**, avec $c_2 = 8 > 0$:

$$\boxed{x_0 = 0 \text{ est un point de minimum local.}}$$

2. Le terme en x^4 n'apparaît pas dans le DL (coefficient $c_4 = 0$), donc $f^{(4)}(0) = 4! \times 0 = 0$. De même, après simplification des termes en x^7 (méthode précédente : $24x^7 - 24x^7 = 0$), $c_7 = 0$, donc

$$\boxed{f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(7)}(0) = 0.}$$

4.6 Calculer une limite indéterminée à l'aide d'un développement limité

Méthode.

Lorsqu'une limite $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ se présente sous forme $\frac{0}{0}$ et que les équivalents usuels ne suffisent pas (sommes d'équivalents, simplifications en cascade), on calcule les DL de f et de g en x_0, à un ordre suffisant pour que les **parties principales** $\mathrm{pp}_f(x) = c_k(x - x_0)^k$ et $\mathrm{pp}_g(x) = d_l(x - x_0)^l$ apparaissent clairement. On a alors :

- si $k < l$: $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{sign}\left(\dfrac{c_k}{d_l}\right)\infty$;
- si $k = l$: $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{c_k}{d_l}$;
- si $k > l$: $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Conseil : on calcule d'abord le DL à l'ordre le plus bas possible ; si cela ne suffit pas à lever l'indétermination (les deux parties principales s'annulent), on augmente progressivement l'ordre.

Exemple. TD 4.4, Exercice 16.a

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\tan^2(x)}$.

Solution.

$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ et $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, donc

$$\tan^2(x) = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Ainsi

$$\frac{1-\cos(2x)}{\tan^2(x)} = \frac{2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} = \frac{2 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\tan^2(x)} = 2.}$$

Remarque. Pour s'entraîner davantage

Le TD 4.4 (Exercice 17) propose des limites où les parties principales du numérateur *et* du dénominateur s'annulent à l'ordre attendu, ce qui impose de pousser le DL un ordre plus loin avant de conclure.

Remarque. Une alternative : le théorème de l'Hôpital
Le théorème de l'Hôpital permet, sous certaines hypothèses (formes $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, $g' \neq 0$ au voisinage de x_0), de calculer une limite indéterminée sans DL :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(si cette dernière limite existe).}$$

Par exemple, pour la limite de l'Application précédente, $f(x) = 1 - \cos(2x)$ et $g(x) = \tan^2(x)$ donnent $f'(x) = 2\sin(2x)$ et $g'(x) = 2\tan(x)(1+\tan^2(x))$, qui sont encore de la forme $\frac{0}{0}$ en 0 : il faudrait réappliquer le théorème (ou repasser par des équivalents, $2\sin(2x) \sim 4x$ et $2\tan(x)(1+\tan^2(x)) \sim 2x$, ce qui redonne $\frac{4x}{2x} \to 2$). Inconvénient de l'Hôpital : chaque application peut faire réapparaître une forme indéterminée, alors qu'un DL poussé à l'ordre suffisant conclut en une seule fois.

4.7 Déterminer une asymptote oblique par développement limité asymptotique

Méthode.
Pour étudier les branches infinies d'une fonction f en $\pm\infty$ à l'aide d'un DL :

1. On pose $t = \dfrac{1}{x} \to 0$ et on exprime $f(x)$ en fonction de t.
2. On développe cette expression en série de t (DL usuel en 0), jusqu'à obtenir une écriture de la forme
$$f(x) = c_0 x + c_1 + \frac{c_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
3. L'**asymptote oblique** a pour équation $y = c_0 x + c_1$.
4. La **position** de C_f par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{c_2}{x}$ (donc par le signe de c_2 en $+\infty$, et l'opposé en $-\infty$).

Exemple. TD 4.4, Exercice 19.a
Réaliser l'étude asymptotique en $\pm\infty$ de $f(x) = (3x+1)e^{\frac{1}{x}} - 1 - x$.

Solution.
En posant $t = \dfrac{1}{x}$ et $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, on développe :

$$3x\, e^{1/x} = 3x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 3x + 3 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En sommant :

$$(3x+1)e^{1/x} = 3x + 4 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 4 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'où

$$f(x) = (3x+1)e^{1/x} - 1 - x = 2x + 3 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Asymptote :

$$\boxed{y = 2x + 3.}$$

Position : le signe de $\dfrac{5}{2x}$ est celui de x, donc

$$\boxed{C_f \text{ est au-dessus de l'asymptote en } +\infty, \text{ en dessous en } -\infty.}$$

5

Primitives et intégrale de Riemann

Acquis d'Apprentissage.

- Les primitives et les techniques de calcul (linéarisation, IPP, fractions rationnelles, changement de variable).
- L'intégrale de Riemann et les critères d'intégrabilité.
- Le théorème fondamental du calcul intégral (Torricelli-Barrow).
- Les fonctions intégrales et leurs propriétés (domaine, parité, dérivée).

5.1 Calculer une primitive par linéarisation trigonométrique

Méthode.
Pour calculer une primitive (ou une intégrale) d'un produit de la forme $\cos^p(x)\sin^q(x)$, ou plus généralement un produit de sinus/cosinus d'arguments différents, on **linéarise** à l'aide des formules d'Euler

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

on développe le produit obtenu, puis on regroupe les exponentielles conjuguées deux à deux pour revenir à une somme de $\cos(kx)$ et/ou $\sin(kx)$, dont une primitive est immédiate.

Exemple. Annale 2024-2025, Exercice 3
Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\sin(2x)\,dx$.

Solution.
Par les formules d'Euler :

$$\sin(3x)\sin(2x) = \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} \times \frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} = -\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}-e^{ix}-e^{-ix}}{4} = -\frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{1}{2}\cos(x).$$

Donc

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\cos(5x) + \frac{1}{2}\cos(x)\right) dx = \left[-\frac{1}{10}\sin(5x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2}{5}.}$$

5.2 Calculer une primitive par intégration par parties

Méthode.
Pour calculer une primitive (ou une intégrale) faisant intervenir le produit d'une fonction qui se simplifie par dérivation ($\ln$, $\arctan$, un polynôme) et d'une fonction qui se primitive facilement, on applique la formule d'intégration par parties

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx,$$

en choisissant v la partie qui se simplifie par dérivation (et u' celle qui se primitive facilement). Si, après une première IPP, l'intégrale restante est de même nature (un polynôme en $\ln$, par exemple), on **répète** l'IPP jusqu'à obtenir une primitive immédiate.

Exemple. Application n°1 — IPP simple, Annale 2024-2025, Exercice 3

Calculer $K = \displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,dx$.

Solution.

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$, donc $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Par IPP :

$$K = \left[x\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.}$$

Exemple. Application n°2 — IPP répétée, Annale 2023-2024, Exercice 3

Calculer $J = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2(t)}{t^2}\,dt$.

Solution.

<u>Première IPP</u> : on pose $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln^2(t)$, donc $u(t) = -\dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \dfrac{2\ln(t)}{t}$:

$$J = \left[-\frac{\ln^2(t)}{t}\right]_1^e + 2\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = -\frac{1}{e} + 2\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt.$$

<u>Deuxième IPP</u>, sur l'intégrale restante : on pose $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$, $v(t) = \ln(t)$, donc $u(t) = -\dfrac{1}{t}$, $v'(t) = \dfrac{1}{t}$:

$$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

<u>En combinant</u> :

$$J = -\frac{1}{e} + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) = \boxed{2 - \frac{5}{e}.}$$

5.3 Calculer une primitive d'une fraction rationnelle par décomposition en éléments simples

Méthode.

Pour calculer la primitive d'une fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$:

1. Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on effectue la **division euclidienne** de P par Q : $P = SQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$, donc $\dfrac{P}{Q} = S + \dfrac{R}{Q}$ (la partie polynomiale S se primitive immédiatement).
2. On **factorise** Q en facteurs du premier degré et/ou du second degré irréductibles, puis on décompose $\dfrac{R}{Q}$ en **éléments simples** : un terme $\dfrac{a}{x - x_0}$ par racine réelle simple x_0, un terme $\dfrac{\alpha x + \beta}{x^2 + px + q}$ par facteur irréductible (qui se primitivera, après mise sous forme canonique, en un $\ln$ et/ou un $\arctan$).
3. On détermine les coefficients (par identification, par valeurs particulières, ou par limites), puis on primitive chaque terme.

Exemple. Application n°1 — racines réelles simples, Annale 2024-2025, Exercice 2

Calculer $J = \displaystyle\int_1^e \frac{2t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^2 + t}\, dt$.

Solution.

Comme $\deg(P) = 3 > \deg(Q) = 2$, on effectue la division euclidienne :

$$\frac{2t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^2 + t} = 2t + 1 + \frac{1}{t(t+1)} = 2t + 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

D'où

$$J = \int_1^e \left(2t + 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[t^2 + t + \ln(t) - \ln(t+1)\right]_1^e = \boxed{e^2 + e - 1 - \ln(e+1) + \ln 2.}$$

Exemple. Application n°2 — facteur irréductible, Annale 2023-2024, Exercice 1, Partie A

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^4}{8(x^2+1)}\, dx$.

Solution.

Par division euclidienne, $\dfrac{5x^4}{8(x^2+1)} = \dfrac{5}{8}\left(x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2+1}\right)$ (le facteur $x^2 + 1$ étant irréductible, son terme se primitive en $\arctan$).

$$\int_0^1 \frac{5x^4}{8(x^2+1)}\, dx = \frac{5}{8}\int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{5}{8}\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan(x)\right]_0^1 = \boxed{\frac{5}{8}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right).}$$

5.4 Calculer une intégrale par changement de variable

Méthode.

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ par changement de variable $t = g(x)$ (ou $x = g(t)$) :

1. On choisit $t = g(x)$ qui simplifie l'expression (souvent pour transformer une exponentielle, une racine, ou un argument composé en une variable simple) ; on exprime x en fonction de t, et on calcule dx en fonction de dt.
2. On transforme les **bornes** : $t = g(a)$ et $t = g(b)$.
3. On obtient une nouvelle intégrale $\int_{g(a)}^{g(b)} h(t)\, dt$, souvent une fraction rationnelle en t, que l'on calcule par les méthodes précédentes (en particulier la méthode 5.3).

Exemple. Annale 2023-2024, Exercice 5

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2e^t + 1}{e^t(e^t + 3)}\, dt$.

Solution.

On pose $x = e^t$, donc $t = \ln(x)$ et $dt = \dfrac{dx}{x}$. Lorsque $t = 0$, $x = 1$; lorsque $t = 1$, $x = e$. L'intégrale devient

$$I = \int_1^e \frac{2x+1}{x^2(x+3)}\, dx.$$

On décompose en éléments simples : $\dfrac{2x+1}{x^2(x+3)} = \dfrac{5}{9x} + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{5}{9(x+3)}$ (coefficients obtenus par identification). D'où

$$I = \left[\frac{5}{9}\ln(x) - \frac{1}{3x} - \frac{5}{9}\ln(x+3)\right]_1^e = \left[\frac{5}{9}\ln\left(\frac{x}{x+3}\right) - \frac{1}{3x}\right]_1^e.$$

$$\boxed{I = -\frac{5}{9}\ln\left(\frac{e+3}{4}\right) - \frac{1}{3e} + \frac{8}{9}.}$$

5.5 Démontrer l'intégrabilité au sens de Riemann et calculer l'intégrale

Propriété. Critère d'intégrabilité
Une fonction f **définie et bornée** sur $[a, b]$, continue sur $[a, b]$ sauf en un **nombre fini** de points où elle présente des discontinuités de première ou deuxième espèce (méthode 3.3), est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. À l'inverse, si f n'est pas définie sur tout $[a, b]$, ou si elle y présente une discontinuité de troisième espèce (non bornée), f **n'est pas** intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Méthode.
Pour étudier l'intégrabilité de f au sens de Riemann sur $[a, b]$ et, le cas échéant, calculer l'intégrale :

1. On vérifie que $[a, b] \subseteq D_f$ et que f est bornée sur $[a, b]$; sinon, on conclut immédiatement à la **non-intégrabilité**.
2. On repère les points de discontinuité de f sur $[a, b]$ et on les classifie (méthode 3.3) : s'il n'y en a qu'un nombre fini, toutes de première ou deuxième espèce, f est intégrable.
3. On calcule l'intégrale en scindant $[a, b]$, par la relation de Chasles, en sous-intervalles sur lesquels f coïncide avec une expression continue dont on détermine une primitive.

Exemple. Application n°1 — cas négatif, Annale 2025-2026, Exercice I
On reprend la fonction f de la méthode 1.1 (Application n°2), de domaine

$$D_f = \bigcup_{k \leq -1}]2k - a, 2k + 1 + a[\cup] - a, 0] \cup]0, +\infty[.$$

Dire si f est intégrable au sens de Riemann dans $[-1, 1]$ et calculer, si possible, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solution.
Puisque $a = \dfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) < 1$, l'intervalle $[-1, -a[$ n'est <u>pas</u> contenu dans D_f : la fonction f n'est pas définie sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. D'après le critère ci-dessus,

$$\boxed{f \text{ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur } [-1, 1] \text{ (et l'intégrale n'a pas de sens).}}$$

Exemple. Application n°2 — cas standard, Test 2 du chapitre 5, Exercice I
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{3 + e^{2x}}} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \ln(1 + 5x^3) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[-3, 1]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$.
3. On pose $g(x) = \displaystyle\int_{x}^{2} f(t)\,dt$. Calculer $g'(2)$.

Solution.
<u>1.</u> $D_f = \mathbb{R} \supseteq [-3, 1]$. f est continue (SPRC) sur $[-3, 1] \setminus \{0\}$, et bornée sur chaque branche (image d'un compact par une fonction continue). En $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

(ces deux limites sont finies) : $x_0 = 0$ est une discontinuité de deuxième espèce, et c'est la seule. Par le critère d'intégrabilité,

$$\boxed{f \text{ est intégrable au sens de Riemann sur } [-3,1].}$$

2. Par Chasles, en scindant en $x_0 = 0$:

$$\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} \frac{e^{2x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,dx + \int_{0}^{1} x^2 \ln(1+5x^3)\,dx.$$

Pour la première, on pose $u = 3 + e^{2x}$, $du = 2e^{2x}dx$:

$$\int_{-3}^{0} \frac{e^{2x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}\,dx = \left[\sqrt{3+e^{2x}}\right]_{-3}^{0} = 2 - \sqrt{3+e^{-6}}.$$

Pour la seconde, on pose $v = 1 + 5x^3$, $dv = 15x^2dx$; $v(0) = 1$, $v(1) = 6$:

$$\int_{0}^{1} x^2 \ln(1+5x^3)\,dx = \frac{1}{15}\int_{1}^{6} \ln(v)\,dv = \frac{1}{15}\Big[v\ln(v) - v\Big]_{1}^{6} = \frac{6\ln 6 - 5}{15}.$$

$$\boxed{\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 2 - \sqrt{3+e^{-6}} + \frac{6\ln 6 - 5}{15}.}$$

3. En écrivant $g(x) = -\displaystyle\int_{2}^{x} f(t)\,dt$, le théorème de Torricelli-Barrow donne $g'(x) = -f(x)$, donc

$$g'(2) = -f(2) = -4\ln(41).$$

(on a utilisé la branche $x > 0$, puisque $2 > 0$: $f(2) = 2^2\ln(1 + 5 \times 8) = 4\ln(41)$).

$$\boxed{g'(2) = -4\ln(41).}$$

5.6 Étudier une fonction intégrale

Propriété. Théorème fondamental — dérivée d'une fonction intégrale composée
Soit f continue sur un intervalle contenant $f(a)$ et $g(x)$, et soit

$$F(x) = \int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt.$$

Par le théorème de Torricelli-Barrow et la formule de dérivation d'une fonction composée, F est dérivable là où g l'est, et

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Méthode.
Pour étudier une fonction intégrale $F(x) = \displaystyle\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt$:

- **Domaine** : D_F est l'ensemble des x tels que $g(x) \in D_f$ (et $a \in D_f$).
- **Parité** : on calcule $g(-x)$; si $g(-x) = g(x)$, alors $F(-x) = F(x)$ directement (F est paire). Sinon, on effectue le changement de variable $t \to -t$ dans l'intégrale définissant $F(-x)$ pour la comparer à $F(x)$ ou $-F(x)$.
- **Dérivée** : on applique la propriété ci-dessus, $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$.
- **Points stationnaires** : on résout $F'(x) = 0$, c'est-à-dire $f(g(x)) = 0$ ou $g'(x) = 0$ (équation produit : on résout séparément chaque facteur).

Exemple. Annale 2025-2026, Exercice IV

On considère
$$F(x) = \int_0^{x^4-x^2} e^{2t^3} \ln(1+5t^2)\,dt.$$

1. Dire si F est une fonction paire ou impaire.
2. Calculer $F'(x)$ et déterminer les points stationnaires de F.

Solution.
1. Posons $g(x) = x^4 - x^2$. On a
$$g(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = g(x),$$
donc
$$F(-x) = \int_0^{g(-x)} e^{2t^3} \ln(1+5t^2)\,dt = \int_0^{g(x)} e^{2t^3} \ln(1+5t^2)\,dt = F(x).$$
$$\boxed{F \text{ est paire.}}$$

2. La fonction $f(t) = e^{2t^3} \ln(1+5t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$; par le théorème ci-dessus, avec $g(x) = x^4 - x^2$ et $g'(x) = 4x^3 - 2x$:
$$\boxed{F'(x) = e^{2(x^4-x^2)^3} \ln\left(1+5(x^4-x^2)^2\right) \cdot (4x^3-2x).}$$

Les points stationnaires sont les solutions de $F'(x) = 0$, c'est-à-dire (puisque $e^{2(x^4-x^2)^3} > 0$ toujours) :
$$\ln\left(1+5(x^4-x^2)^2\right) = 0 \quad \text{ou} \quad 4x^3 - 2x = 0.$$

La première équation équivaut à $(x^4-x^2)^2 = 0$, soit $x^4 - x^2 = 0$, soit $x^2(x^2-1) = 0$: $x = 0$ ou $x = \pm 1$. La seconde équivaut à $2x(2x^2-1) = 0$: $x = 0$ ou $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. En réunissant :
$$\boxed{x \in \left\{0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.}$$

5.7 Synthèse : étudier la limite d'une suite récurrente définie via une fonction intégrale

Méthode.
Pour étudier la limite d'une suite récurrente $u_{n+1} = F(u_n)$, où $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction intégrale :

1. On étudie le signe de $g(x) = F(x) - x$, en calculant $g'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1$ (Torricelli-Barrow).
2. On en déduit le sens de variation de g, et sa position par rapport à 0 (en particulier $g(a) = -a$, puisque $F(a) = 0$) : cela donne, pour u_0 fixé, une comparaison entre $u_1 = F(u_0)$ et u_0, qui se propage à toute la suite si F est croissante (méthode 2.2).
3. On conclut à la convergence par le théorème de la limite monotone, puis on détermine la limite ℓ comme solution de l'équation $F(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$.

Exemple. Annale 2025-2026, Exercice V
On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1+e^{2t}}{e^{2t}+2e^t+1}\,dt$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = F(u_n)$.

1. Montrer que $g(x) = F(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de (u_n).

Solution.

1. La fonction $f(t) = \dfrac{1+e^{2t}}{(e^t+1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; par Torricelli-Barrow, $F'(x) = f(x)$, donc

$$g'(x) = f(x) - 1 = \frac{1+e^{2x}}{(e^x+1)^2} - 1 = \frac{1+e^{2x}-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

2. Comme $F(0) = 0$, on a $g(0) = 0$; g étant strictement décroissante, $g(x) < 0$ pour $x > 0$ et $g(x) > 0$ pour $x < 0$.

Montrons par récurrence que $0 \leq u_n \leq u_0 = 1$ pour tout n : puisque $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, F est croissante, donc si $u_n \in [0,1]$, alors $F(0) \leq F(u_n) \leq F(1)$; comme $g(1) < 0$, $F(1) < 1$, donc $u_{n+1} = F(u_n) \in [0,1[$, ce qui propage l'encadrement.
De plus, pour $u_n > 0$, $g(u_n) < 0$ donne $F(u_n) < u_n$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est **décroissante**, minorée par 0, donc **convergente** (théorème de la limite monotone) vers une limite $\ell \geq 0$ vérifiant $F(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $g(\ell) = 0$.

Or g est strictement décroissante avec $g(0) = 0$: $\ell = 0$ est l'unique solution. Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

Remarque : on peut confirmer ce résultat en calculant explicitement F par le changement de variable $u = e^t$ (méthode 5.4), qui donne $F(x) = x + \dfrac{2}{e^x+1} - 1$, d'où $g(x) = \dfrac{2}{e^x+1} - 1$: on retrouve bien $g(0) = 0$ et g strictement décroissante.